FONDO PIZZOFALCONE

6115

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine

R. BIBLIOTECA NAZIONALE

B. Prov.

NAPOLI

B. Prov
II
784-788

Digitized by Google

609967

# Geometrie der Stellung

oder

über die Anwendung der Analysis auf Geometrie

von

L. N. M. Carnot

Mitgliede des Nationalinstituts, der Gesellschaft der Wissenschaften zu Dijon u. s. w.

übersetzt

von

H. C. Schumacher

Ausserordentlichem Professor der Astronomie zu Kopenhagen.

---

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΚΑΘΑΡΜΑΤΑ ΨΥΧΗΣ.

---

Erster Theil.

---

Mit Kupfern.

---

Altona,

bey J. F. Hammerich.

1810.

NAPOLI

Dem

# Könige von Dänemark

als

ein ſchwaches Zeichen ewiger Dankbarkeit

in tiefſter Ehrfurcht gewidmet

von

H. C. Schumacher.

# Vorrede.

Ich lege dem Publikum hier die Ueberſetzung von

*Géométrie de Poſition par L. N. M. Carnot. Paris* 1803. 4. (Einleitung XXXVIII, Text 489 Seiten.)

vor. Ein Werk, das neue richtige Anſichten mit einer allgemeinen Erfindungsmethode (der Darſtellung durch Tafeln) verbindet, kurz ein Werk Carnot's durfte wohl nicht länger

mehreren entzogen werden, die der hohe Preis des Originals, oder die Sprache, davon abhielt.

Den Quartband des französischen Werks habe ich in zwey Oktavbände getheilt, von denen der erste das Original bis zur Seite 252 enthält, und ausserdem eine kurze Wiederholung der darin aufgestellten Theorie der sogenannten negativen Quantitäten. Dieser Zusatz ist aus dem

*Mémoire sur la Relation qui existe entre les distances respectives de cinq points pris dans l'espace, par L. N. M. Carnot. Paris* 1806. 4. (111 Seiten.)

entlehnt, von dem ich auch eine Uebersetzung liefern werde, zu der Carnot selbst mich aufgefordert hat. Er erklärt in seinen Briefen an mich dieſs *Mémoire* für den besten Zusatz, den er noch zu seiner Geometrie der Stellung machen könne, und bedauert, dafs ihm eine

ſchwächliche Geſundheit und Geſchäfte anderer Art nicht erlaubten, beyde Werke in eins zu verſchmelzen.

Was ich in Hinſicht auf meine Arbeit anzuzeigen hätte, wäre wohl folgendes.

Im Anfange, wo der Verfaſſer die Grundſätze ſeiner Theorie entwickelt, habe ich nichts abgekürzt, am Ende aber, auch unter den Beyſpielen, manches zuſammengezogen und ausgelaſſen, was ein geübter Leſer nicht vermiſſen wird. Andere Leſer verträgt das Werk ſeiner Natur nach nicht.

Mehrere Druckfehler des Originals, auch beträchtliche, ſind von mir verbeſſert, es kann aber ſeyn, daſs ich in den Tafeln noch einen oder den andern überſehen habe. Das wird mir denn auch wohl niemand zur Laſt legen, obgleich ich nicht, wie Pinaroli in ſeiner *Antichitá di Roma*, daraus Nutzen für meine Leſer hoffe.

*Circa gli errori di preyo eſſer diſcreto, perſuadentoti over io impieguto tutto il poſſibile per evitarli e ſe pure ve ne oſſerverai ſerviranno per eſſercitar la tua pazienza.*

Es könnte bey einer flüchtigen Anſicht auffallen, wenn ich *poſition* durch Stellung, *quantité* durch Quantität überſetzt habe; da die Antwort aber ſchon vorne im Werke ſelbſt liegt, brauche ich ſie wohl hier nicht zu wiederholen.

Auf den Kupfern zu dieſem Theile ſteht Geometrie der Lage. Mein Herr Verleger hat ſie nämlich von einem Buchhändler aus der Rheingegend gekauft, der ſie zu einer von ihm projektirten Ueberſetzung ſtechen lieſs. Da ſie ſonſt gut gearbeitet ſind, glaubten wir dieſen kleinen Uebelſtand nicht beachten zu dürfen.

Einige Bemerkungen über die hier vorgetragene Theorie werde ich dem zweyten Theile als Anhang beyfügen, natürlich mit Rückſicht auf Buſſe's Vergleichung.

Den gröſsten Theil des erſten Theils habe ich vor drey Jahren ausgearbeitet, d. h. zu einer Zeit, wo Mathematik mir noch Erholung von andern Arbeiten war. Es iſt daher möglich, daſs er gegen das übrige Werk verliert, aber ich wage doch nicht den angeführten Grund als Entſchuldigung zu gebrauchen, da jetzt niemand lebhafter als ich überzeugt ſeyn kann, wie unſtatthaft es an und für ſich war, eine der erhabenſten Wiſſenſchaften, eine Wiſſenſchaft von dem ungeheuren Umfange, als Nebenwerk behandeln zu wollen, und ſie gelegentlich *ad recreationem animi* zu benutzen. —

Wo ich gefehlt habe, werde ich jede Zurechtweiſung benutzen, eine ruhige mit Dank, eine andere, ohne mich dem Urheber ſonderlich verpflichtet zu glauben.

Altona den 22. April 1808.

Schumacher.

# Inhalt des erſten Theils.


Seite

Vorläufige Abhandlung 1

Erſter Abſchnitt.

Allgemeine Grundſätze 60

Zweyter Abſchnitt.

Darſtellung der Art, die Correlation verſchiedener Figuren und die jedesmaligen Stellungen der verſchiedenen Theile einer Figur zu finden 152

Dritter Abſchnitt.

Bildung analytiſcher Tafeln, die geeignet ſind, das Ganze der Verhältniſſe, die unter den verſchiedenen Theilen derſelben Figur beſtehen,

# Geometrie der Stellung.

# Vorläufige Abhandlung.

Der Titel dieſes Werks kann die Mathematiker an Leibnitzens Idee einer Analyſis der Lage erinnern, die aber nicht ausgeführt wurde, obgleich ſie die Aufmerkſamkeit der Gelehrten verdiente. „Es iſt „gewiſs,“ ſagt d'Alembert, „daſs die Analyſis der „Lage etwas iſt, das der gewöhnlichen Algebra fehlt; „und eben weil ſie fehlt, ſcheint eine Aufgabe oft „mehr Auflöſungen zu haben, als ſie in den be„ſchränkten Umſtänden, in denen man ſie betrachtet, „haben ſoll. Freylich iſt in gewiſſer Hinſicht dieſer „Ueberfluſs der Algebra, die ſelbſt das, was man „nicht verlangt, giebt, bewundernswürdig, aber er „macht auch oft, daſs eine Aufgabe, die, wenn man „ihren Ausdruck nach der Strenge nimmt, wirklich „nur eine Auflöſung hat, in eine Gleichung von „mehreren Graden eingehüllt wird, und ſo auf ge„wiſſe Art nicht aufgelöſt werden kann. Es wäre „ſehr zu wünſchen, daſs man ein Mittel fände, die „Lage mit in die Rechnung der Aufgaben zu bringen, „dadurch würden ſie gröſstentheils ſehr vereinfacht

„werden; doch der Zuſtand und die Natur der alge„braiſchen Analyſis ſcheinen es nicht zu erlauben“ (*Encyclopédie*, *art. Situation*).

Der Gegenſtand dieſes Werks iſt von dem der eben erwähnten Analyſis der Lage verſchieden, aber doch mit ihm analog. Leibnitz wollte, daſs man in den Ausdruck der Bedingungen einer geometriſchen Aufgabe die verſchiedenen Stellungen der ſich entſprechenden Theile verglichener Figuren brächte, damit, indem man ſie durch ein beſonders unterſcheidendes Merkmahl trennte, ſie deſto leichter in der Rechnung abgeſondert werden könnten. Dieſe Verſchiedenheit der Stellungen nun drückt man oft durch bloſse Veränderungen der Zeichen aus, und gerade die Lehre von dieſen Veränderungen iſt der weſentliche Gegenſtand meiner anzuſtellenden Unterſuchungen, und die Lehre, welche ich Geometrie der Stellung nenne.

Die Geometrie der Stellung iſt alſo genau genommen die Lehre von den ſogenannten poſitiven und negativen Quantitäten, oder vielmehr ein Mittel ſie zu erſetzen, denn dieſe Lehre wird gänzlich darin verworfen. Schon ſeit langer Zeit hat man eingeſehen, daſs mehrere algebraiſche Formeln, deren Glieder ſich nur durch die Zeichen + und — unterſcheiden, oft analoge Eigenſchaften verſchiedener Figuren ausdrücken, deren Conſtruction weſentlich dieſelbe iſt, und die nur durch Verſetzung correſpondirender Theile ſich von einander unterſcheiden. Man verdankt Descartes dieſe ſcharfſinnige Bemerkung, aber man irrt ſich, wie ich glaube, wenn man die Fol-

gerungen daraus gar zu allgemein machen will. Ich werde hier auf die Grundſätze zurückgehen, und den Miſsbrauch zeigen, der daraus entſtehen kann.

Nichts iſt einfacher, als der Begriff negativer Quantitäten, wenn poſitive vorhergehen, die gröſser ſind als ſie; aber in der Algebra ſtöſst man jeden Augenblick auf Ausdrücke von negativer iſolirter Form, und will man genau den Sinn dieſer Ausdrücke wiſſen, ſo fehlen deutliche Grundſätze, eben weil dieſe Ausdrücke durch Verrichtungen entſtanden ſind, die ſelbſt nur für poſitive oder abſolute Quantitäten deutlich und ausführbar ſind. Auch konnten die gröſsten Mathematiker nie über die wahre Bedeutung der iſolirten negativen Quantitäten einig werden. Man darf nur auf den langen Streit zurückſehen, der ſich erſt zwiſchen Leibnitz und Bernoulli, dann zwiſchen Euler und d'Alembert, über die Frage erhob, ob die Logarithmen negativer Quantitäten wirkliche oder eingebildete wären? Obgleich er jetzt geendigt iſt, bleibt doch noch immer die Paradoxe, daſs $log\,(-2)^2 = log\,(2)^2$, da man doch nicht $2.log.-2 = 2.log.2$ hat, wie es die gewöhnliche Theorie der Logarithmen zu erfordern ſcheint. Aber im Grunde kann man ſich nicht über dieſen Punkt vereinigen, weil man von Sachen ſpricht, die durch ihr Weſen ſelbſt unverſtändlich ſind. Die algebraiſchen Verrichtungen, als Addition, Subtraktion u. ſ. w. ſind und können nur für die Fälle bewieſen werden, wo ſie ausführbar ſind. So kann man leicht zeigen, daſs, wenn $a > b$, man $(a-b)c = ac - bc$ haben müſſe, aber man kann unmöglich denſelben Satz beweiſen,

wenn $b > a$, weil man dann unmöglich begreifen kann, was $a - b$, oder $ac - bc$ seyn soll.

Um in der That eine isolirte negative Quantität zu erhalten, müsste man eine wirkliche Quantität von Null abziehen, Etwas von Nichts wegnehmen, eine unmögliche Verrichtung. Wie kann man sich also eine isolirte negative Quantität vorstellen?

D'Alembert, dem man eine besondere Behandlung des philosophischen Theils der strengen Wissenschaften verdankt, hat diese Frage bey dem Artikel *Négatif* in der Encyklopädie untersucht; nachher ist er verschiedene Mahle darauf zurückgekommen, vorzüglich in seinem *Mémoire sur les quantités négatives*, das im 8ten Theile seiner *Opuscules mathématiques* steht, wo er, wie es scheint, die Auflösung der Schwierigkeiten vor hatte, welche dieser kitzliche Gegenstand darbietet. „Es wäre zu wünschen," sagt er in der angeführten Abhandlung, „dass in den Elemen-„tar-Lehrbüchern darauf gesehen würde, die mathe-„matische Theorie dieser Quantitäten gehörig aufzu-„hellen, oder zum wenigsten, dass man sie nicht so „vorstellte, dass sie im Geiste der Anfänger falsche „Begriffe zurücklassen muss."

Eben der grosse Mathematiker bewies vollkommen in dieser Abhandlung, auf die ich bald zurückkommen werde, das Unzureichende und Falsche der gewöhnlichen Theorien, aber er schlägt nichts vor, um sie zu ersetzen, und beschränkt sich auf wenige theilweise Erklärungen, die wenig von der Theorie selbst, die er umstösst, verschieden sind: auch scheint er selbst nicht ganz mit seinen Erklärungen zufrieden

zu ſeyn, weil er hinzufügt: „am Ende muſs ich noch „bemerken, daſs dieſe ganze Theorie von negativen „Quantitäten noch nicht genug aufgeklärt ſey.“ Derſelbe Verfaſſer drückt ſich ſo in der Encyklopädie (*art. Négatif*) aus:

„Man muſs geſtehen, daſs es nicht leicht iſt, die „negativen Quantitäten zu beſtimmen, und daſs einige „geſchickte Leute ſelbſt dazu beygetragen haben, ihn „durch nicht genaue Begriffe, die ſie davon geben, zu „verwirren. Betrachtet man die Genauigkeit und Ein„fachheit der algebraiſchen Verrichtungen an negati„ven Quantitäten, ſo iſt man ſehr geneigt zu glau„ben, daſs die beſtimmte Vorſtellung, die man mit „negativen Quantitäten verknüpfen ſoll, eine einfache „Vorſtellung ſeyn müſſe, die nicht eben erſt aus einer „weit hergeholten Metaphyſik abzuleiten ſey. Um „ihren wahren Begriff zu entdecken, muſs man gleich „anfangs bemerken, daſs die Quantitäten, welche „man negative nennt, und fälſchlich als unter 0 be„trachtet, ſehr oft durch wirkliche Quantitäten dar„geſtellt werden: z. B. in der Geometrie, wo die „negativen Linien von den poſitiven nur durch ihre „Lage in Hinſicht auf eine Linie oder Punkt, den ſie „mit einander gemein haben, unterſchieden ſind.“.....

„Die negativen Quantitäten zeigen wirklich in „der Rechnung poſitive Quantitäten an, die man „aber in einer falſchen Stellung angenommen hat. „Das Zeichen —, was man vor einer Quantität fin„det, dient dazu, den Irrthum, den man in der Hy„potheſe begangen, zu verbeſſern und unſchädlich zu „machen.“ . . . . . .

„Es giebt alſo wirklich und abſolut gedacht keine „iſolirte negative Quantität: —3 abſtrakt genommen, „giebt dem Geiſte keinen Begriff; aber wenn ich „lage, daſs jemand einem andern —3 Thaler gegeben „hat, ſo heiſst das in verſtändlicher Sprache, daſs er „ihm 3 Thaler genommen hat.“ . . . . . .

„In einem Werke, wie dieſes, kann dieſe Vor„ſtellung unmöglich mehr entwickelt werden; aber „ſie iſt ſo einfach, daſs ich ſehr zweifle, ob man ſtatt „ihrer eine klarere und genauere geben könne. Und „ich glaube verſichern zu können, daſs ſie uns, wenn „wir ſie auf alle auflösbare Aufgaben anwenden, die „negative Quantitäten enthalten, nie verlaſſen werde.“

Es ſcheint nach dieſen Ausdrücken, daſs d'Alembert die negativen Quantitäten als wirkliche betrachtet, die man im entgegengeſetzten Sinne von den poſitiven nähme; ein Begriff, den er an andern Stellen ſiegreich bekämpft, wie wir bald ſehen werden. Doch leuchtet aus dieſen wenigen Worten eine richtige Theorie hervor, und man bedauert, daſs ſie nicht mehr in dieſem Artikel ausgeführt iſt.

Euler, der ſtets eben ſo deutlich als tiefſinnig iſt, der mit ſo vieler Geſchicklichkeit die negativen und eingebildeten Werthe gebrauchte, und der ſelbſt durch ſeine Analyſis den Streit über die Natur der Logarithmen negativer Quantitäten endigte; Euler, ſag' ich, ward ohne Zweifel durch eine ſichere Spekulation geleitet. Indeſſen ſagt er doch in ſeiner *Introduction à l'Analyſe infinitéſimale. L. II. no.* 3., daſs die negativen Quantitäten weniger als o ſind. Aber man kann annehmen, da er in dieſem Werke ſich

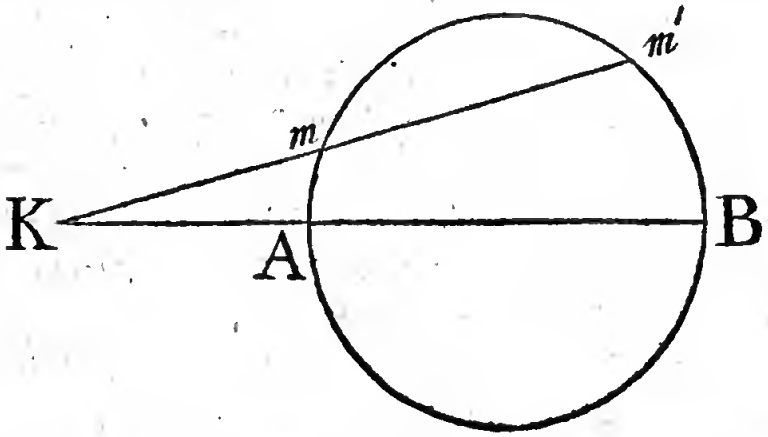
nicht besonders mit diesem Gegenstande beschäftigen wollte, dass er sich an den Begriff gehalten habe, der sich am natürlichsten darbietet, wenn ihm gleich Genauigkeit fehlt. Noch mehr, Newton selbst hatte schon diese Erklärung in seiner *Arithmetica universalis* angenommen, wahrscheinlich aus demselben Grunde.

Die Begriffe, die man bis jetzt von den isolirten negativen Quantitäten gegeben hat, kommen auf zwey zurück, auf den, von dem wir oben sprachen, nämlich es seyen Quantitäten, geringer als 0, und auf die Behauptung, dass die negativen Quantitäten von derselben Natur wie die positiven, nur im entgegengesetzten Sinn genommen, seyen. D'Alembert hat beyde zerstört. Der ersten setzt er ein Argument entgegen, das mir unwiderlegbar scheint.

Man nehme, sagt er, folgendes Verhältniss $+1 : -1 = -1 : +1$, wäre der bestrittene Begriff genau, d. h. wäre $-1$ kleiner wie 0, so würde es um so eher auch kleiner als 1 seyn, also würde das zweyte Glied dieser Proportion kleiner als das erste, und daher das vierte kleiner als das dritte seyn, d. h. $+1$ müsste kleiner als $-1$ seyn: also wäre $-1$ zugleich kleiner und grösser als $+1$, was sich widerspricht.

Den zweyten der vorher gegebenen Begriffe giebt d'Alembert mit demselben Glücke in der angeführten Abhandlung über die negativen Quantitäten an, und doch, weil er nichts hat, was er an die Stelle setzen könnte, scheint er ihn zum Grund anzunehmen und blofs zeigen zu wollen, dass er verschiedenen Ausnahmen unterworfen sey. Es ist um so nöthiger,

ſagt er, dieſen Satz zu beweiſen, da er nicht immer ſtatt hat. Aber d'Alembert ſagt nicht, wie man die Fälle unterſcheiden könne, wo man dieſe Regel richtig anwendet, und nach den Gründen und Beyſpielen, die er giebt, iſt ſie offenbar unbeſtimmt oder vielmehr ganz falſch. Hier nur ein Beyſpiel, einfach und treffend, das allein genug iſt, dieſe ganze Lehre umzuſtoſsen. Man wird im Werke ſelbſt viele finden.




Von einem Punkte $K$, den man auſserhalb eines gegebenen Cirkels annimmt, ſoll man eine gerade Linie $\overline{Kmm'}$ ziehen, ſo daſs der vom Cirkel abgeſchnittene Theil $\overline{mm'}$ einer gegebenen Linie gleich ſey.

Von dem Punkte $K$, durch das Centrum des Cirkels, ziehe man die gerade Linie $\overline{KAB}$, welche den Umkreis in $A$ und $B$ trifft.

Es ſey $\overline{KA} = a$, $\overline{KB} = b$, $\overline{mm'} = c$, $\overline{Km} = x$, ſo hat man nach den Eigenſchaften des Cirkels

$$ab = x(c+x) = cx + xx;$$

alſo $xx + cx - ab = 0$, oder $x = -\frac{c}{2} \pm r\left(\frac{c^2}{4} + ab\right)$, folglich hat $x$ zwey Werthe; der erſte, der poſitiv

ist, löst ohne Schwierigkeit die Frage auf; aber was bedeutet der zweyte, der negativ ist? Es scheint, dass er nur dem Punkte $m'$ entsprechen könne, wo $\overline{Km'}$ zum zweyten mahle den Umkreis schneidet, aber sucht man geradezu $Km'$, indem man diese Linie als unbekannt nimmt $= x$, so hat man

$$ab = x(x-c) \text{ oder } x = \frac{c}{2} \pm r\left(\frac{c^2}{4} + ab\right)$$

dessen positiver Werth genau derselbe ist, der sich im ersten Fall mit dem negativen Zeichen darstellte. Also obgleich von den zwey Wurzeln der Gleichung $x = -\frac{1}{2}c \pm r(\frac{1}{4}c^2 + ab)$ eine positiv, die andere negativ ist, müssen sie doch beyde nach derselben Richtung in Bezug auf den festen Punkt $K$ genommen werden. Also führt die Regel, vermöge der diese Wurzeln nach entgegengesetzten Richtungen genommeu werden sollen, zu falschen Resultaten. Nimmt man im Gegentheil den festen Punkt $K$ auf dem Durchmesser $\overline{AB}$ selbst und nicht auf seiner Verlängerung, so würde man für $x$ zwey positive Werthe finden, und doch müsste man sie in entgegengesetzter Richtung von einander nehmen. Die Regel ist also auch falsch für diesen Fall.

Sagt man, dass dieser Grundsatz (dass die positiven und negativen Wurzeln in entgegengesetzter Richtung genommen werden müssen) nicht so zu verstehen sey, so frage ich, wie man ihn denn verstehen soll? Und eben daraus, dass er einer Erklärung bedarf, um nicht in der natürlichsten Bedeutung genommen zu werden, schliesse ich, dass er dunkel und unbestimmt sey.

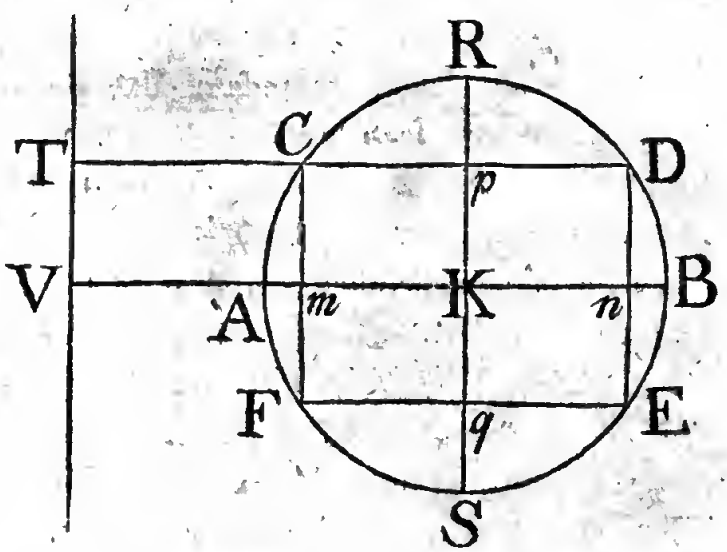
Dieſen Argumenten, welche d'Alembert gegen beyde vorher gegebene Begriffe aufſtellt, werde ich noch einige andere beyfügen, die mir eben ſo überzeugend ſcheinen.

Gleich anfangs behaupte ich, daſs der erſte dieſer Begriffe ungereimt iſt, und um ihn zu zerſtören, will ich nur bemerken, daſs man in einer Rechnung keine Quantität, die Null iſt, in Vergleich mit denen, die es nicht ſind, zu beachten braucht, alſo noch viel weniger die, welche kleiner als o ſind; d. h. die negativen Quantitäten. Da dies nun gewiſs falſch iſt, ſo ſind die negativen Quantitäten nicht kleiner als o.

Eine Menge Paradoxen oder vielmehr handgreifliche Ungereimtheiten entſtehen aus demſelben Begriffe, z. B. $-3 < +2$ und doch $(-3)^2 > 2^2$, weil $(-3)^2 = 9$ und $2^2 = 4$; d. h. unter zwey ungleichen Quantitäten 2 und $-3$, wäre das Quadrat der gröſsern kleiner als das Quadrat der kleinern, und umgekehrt, was gegen alle deutliche Vorſtellungen anſtöſst, die man ſich von der Quantität bilden kann.

Wir wollen zum zweyten Begriff übergehen, nach dem wir uns den Unterſchied der negativen von den poſitiven Quantitäten nur darin denken müſſen, daſs ſie in entgegengeſetzter Richtung von einander genommen werden. Dieſe Vorſtellung iſt ſinnreich, aber eben ſo wenig richtig, wie die vorige. Denn wenn zwey Quantitäten, eine poſitive und eine negative, gleich wirklich wären, und ſich nur durch ihre Stellung unterſchieden, warum wäre die Wurzel der einen eine eingebildete, und die der

andern eine wirkliche Quantität? Warum ſollte $r - a$ nicht eben ſo wirklich als $r + a$ ſeyn? Kann man eine wirkliche Quantität begreifen, deren Quadratwurzel man nicht ausziehen könnte? Und woher käme das Privilegium der erſtern $-a$, ihr Zeichen dem gemeinſchaftlichen Produkt $-a \times +a$, zu geben? Der Ausdruck Quantitäten in entgegengeſetzter Richtung von einander genommen, iſt alſo zum wenigſten ſehr unbeſtimmt, und führt zu einer unauflösbaren Verwirrung der Vorſtellungen. Aber ich gehe noch weiter, ich beweiſe, daſs der Begriff vollkommen falſch iſt, und daſs, wenn man ihn zuließe, die gröſsten Ungereimtheiten daraus entſtehen würden.




*ACRDBESF* ſey eine beliebige Curve, z. B. ein Cirkel, in deſſen Ebene man zwey Axen ſenkrecht auf einander zieht *AB*, *RS*, die ſich im Punkte *K* ſchneiden, den man als Urſprung der Abſciſſen annimmt. Aus *C*, einem beliebigen Punkte der Curve, ziehe man die Ordinate $\overline{Cp}$, und verlängere ſie bis *D*. Iſt dies geſchehen, und betrachtet man nach

dem vorigen Begriffe $\overline{pD}$ z. B. als positiv, so wird $\overline{Cp}$ negativ seyn und man hat $\overline{Cp} = -\overline{pD}$, also $\overline{Cp} + \overline{pD}$, oder $\overline{CD} = 0$; was ungereimt ist. Aus eben dem Grunde, wenn man aus demselben Punkt $C$, $\overline{Cm}$ perpendikulair auf $\overline{AB}$ zieht, und diese Linie bis $F$ verlängert, hat man $\overline{mF} = -\overline{Cm}$, also $\overline{Cm} + \overline{mF}$, oder $\overline{CF} = 0$, ein eben so ungereimtes Resultat. Noch mehr, weil $\overline{CD} = 0$, $\overline{CF} = 0$, so hat man $\overline{CD} . \overline{CF} = 0$, das heißt den Flächeninhalt des Rectangels $CDEF = 0$, daraus würde z. B. folgen, daß das in einen Cirkel beschriebene Quadrat (also jedes) $= 0$ sey. Das sind die Irrthümer, die durchaus aus dem vorigen Begriff folgen. Es ist also falsch, daß $\overline{Cp}$ eine negative Quantität sey, und man kann geradezu leicht beweisen, daß sie nothwendigerweise positiv seyn müsse: denn zieht man aus irgend einem Punkte $V$ der geraden Linie $\overline{AB}$ über $A$ hinaus verlängert eine Linie $\overline{VT}$, parallel mit $\overline{RR}$, so ist es augenscheinlich, und wird selbst von denen zugegeben, die den vorigen Begriff annehmen, daß die 3 Linien $\overline{TC}$, $\overline{Tp}$, $\overline{TD}$, die alle in Hinsicht der neuen Axe $\overline{VT}$ auf derselben Seite liegen, positiv sind: nun hat man $\overline{Cp} = \overline{Tp} - \overline{TC}$, also weil $\overline{Tp} > \overline{TC}$ ist $\overline{Cp}$ eine positive Quantität.

Man sagt vielleicht, $\overline{Cp}$ ist positiv, wenn man es auf die Axe $\overline{TV}$ bezieht, und negativ, wenn es auf $\overline{RS}$ bezogen wird. Aber das wäre ein neues Räthsel, noch schwerer zu lösen als das erste, und dies in der Wissenschaft, deren hauptsächlichster Charakter Evidenz ist.

Um noch augenſcheinlicher zu beweiſen, wie man durch dieſen Grundſatz zum Irrthum verleitet wird, ergreife ich das vorige Argument wieder, indem ich ihm eine neue Form gebe.

Aus dem Centro $K$ beſchreibe man einen Cirkel $AS$, und ziehe einen beliebigen Durchmeſſer $\overline{AB}$, ſo iſt $\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KB}$ $(A)$. Nun ziehe ich durch $K$ die Axe $\overline{RS}$ ſenkrecht auf $\overline{AB}$, dann ziehe ich durch einen beliebigen Punkt des Umkreiſes $C$ die Sehne $\overline{CD}$ parallel mit $\overline{AB}$, und nehme an, daſs ſie die Axe $\overline{RS}$ in $p$ ſchneidet. $R$ ſey Urſprung der Abſciſſen, die Abſciſſe $\overline{Rp} = x$, die Ordinate $\overline{pD} = y$, und der Halbmeſſer $= a$.

Ich habe alſo $yy = 2ax - xx$, folglich $y = \pm \sqrt{(2ax - xx)}$, woraus ich nach dieſer Theorie ſehe, daſs $y$ zwey Werthe hat, die gleich, aber gerade entgegengeſetzt ſind; der eine $\overline{pD}$, welchen die poſitive Wurzel darſtellt, der andere $\overline{Cp}$, der durch die negative Wurzel ausgedrückt wird, d. h. wir haben

$\overline{pD} = +\sqrt{(2ax - xx)}$ und $Cp = -\sqrt{(2ax - xx)}$; Gleichungen, die für jeden Werth von $\overline{Rp}$, oder $x$ ſtatt haben müſſen. Nimmt man alſo $\overline{Rp} = \overline{RK}$ an, oder $x = a$; ſo wird $\overline{pD}$ $\overline{KB}$, und $\overline{Cp}$ wird $\overline{AK}$; folglich werden die Gleichungen $\overline{KB} = +a$, und $\overline{AK} = -a$. Setzen wir dieſe Werthe von $\overline{AK}$, $\overline{KB}$ in die Gleichung $(A)$, ſo wird $\overline{AB} = 0$. Ein abſurdes Reſultat, das aber ſtrenge aus dieſer Theorie deducirt iſt. Alſo iſt dieſe Theorie vollkommen falſch. Es wäre vielleicht möglich, gegen meine Argumente metaphyſiſche Spitzfindigkeiten zu gebrauchen, aber

ich glaube nicht, dafs man deutlich und für einen mathematiſchen Geiſt befriedigend darauf antworten kann.

Die Gründe, mit denen man gewöhnlich dieſe beſtrittenen Begriffe ſtützt, haben aufserdem an ſich keinen Beſtand. Es ſey, ſagt man, eine Quantität $A$, von der man eine kleinere Quantität $a$ abzieht, der Unterſchied $A-a$ wird kleiner als $A$ ſeyn. Nimmt nun $a$ zu, ſo wird $A-a$ immer kleiner, und endlich o, wenn $A=a$, alſo, fügt man hinzu, wächſt $a$ noch immer, ſo wird $A-a$ kleiner als o.

Aber um das Falſche dieſes Schluſſes zu zeigen, braucht man nur zu erinnern, dafs man ihn eben ſo gut auf $\Gamma(A-a)$ anwenden könne. In der That iſt $A$ gegeben, ſo nimmt $\Gamma(A-a)$ immer mehr ab, je gröſser $a$ wird, und wird o, wenn $A=a$; alſo müſste ſie weniger als o werden, d. h. blos negativ und nicht eingebildet, wenn $a$ gröſser als $A$ wird. Welches falſch iſt.

Man kann eben dies denen entgegenſtellen, die behaupten, negative Quantitäten würden im entgegengeſetzten Sinne von poſitiven genommen. Denn aus eben dem Grunde, aus dem $A-a$ bald in dieſem, bald im entgegengeſetzten Sinne genommen wird, nachdem $a$ kleiner oder gröſser als $A$ iſt, müſste auch $\Gamma(A-a)$ bald in dem einen, bald in dem andern Sinne genommen, aber nie eingebildet werden. Dies alles kommt daher, weil die Betrachtung gleich anfangs weſentlich $A>a$ vorausſetzt. Man verfällt alſo nachher in Widerſpruch, wenn man annimmt, dafs $a$ gröſser werden kann als $A$; und der daraus

gezogene Schluſs iſt falſch, weil er $A$ zugleich gröſser und kleiner als $a$ annimmt.

Dieſer Widerſpruch, in den die verfallen, die die wirkliche Exiſtenz der negativen Quantitäten annehmen, iſt augenſcheinlich, von welcher Seite man auch die Sache anſehen mag. Wir wollen annehmen, $m$, $n$ ſeyen zwey beliebige veränderliche, anfangs ſey $m > n$, und $m - n = y$. Nun wollen wir uns vorſtellen, daſs das Syſtem ſich ſo ändere, daſs $n > m$ werde, ſo ſchlieſsen die, welche die wirkliche Exiſtenz der negativen Quantitäten annehmen, folgendermaſsen:

Weil $n$ gröſser als $m$ geworden iſt, ſo iſt auch $m - n$ augenſcheinlich negativ geworden, iſt alſo $m - n$, $y$, ſo iſt $y$ auch negativ, alſo muſs man in die Gleichung $-y$ für $+y$ ſetzen, alſo muſs dieſe Gleichung $m - n = -y$ oder $y = n - m$ werden; alſo iſt der wahre Werth von $y = n - m$.

Die Antwort auf dieſe Schlüſſe iſt ſehr einfach; denn da $n$ nach der Hypotheſe $> m$ geworden iſt, ſo iſt $n - m$ auch poſitiv, alſo iſt $y$, welches man $= n - m$ fand, auch poſitiv, und nicht negativ, wie man es annahm.

Aber, wird man ſagen, wie kommen wir, indem wir, wie oben, von der Vorausſetzung ausgehen, daſs $y$ negativ ſey, auf ein ganz entgegengeſetztes Reſultat? Weil in den neuern Schlüſſen noch ein Widerſpruch iſt. Denn weil $y$ negativ war, ſchloſs man, man müſſe in die Gleichung $-y$ ſtatt $+y$ ſetzen; dies iſt aber nicht der Fall, denn $y$ hört nicht auf, indem es negativ wird, gleich $m - n$ zu ſeyn,

was auch negativ ist. Ist $y$, wie man will, negativ, so muss $-y$ positiv seyn. Also, indem man $-y$ für $+y$ setzt, verfällt man wieder in einen Widerspruch, denn man erhält so $-y = m-n$, aber $m-n$ ist negativ, und wir haben eben gesehen, dass $-y$ positiv ist. Also sollte die Gleichung statt haben, so müsste eine positive Quantität einer negativen gleich seyn, was ungereimt ist.

Vielleicht sagt man noch, was schaden die fehlerhaften Schlüsse, wenn das daraus gezogene Resultat genau und ein Mittel zur Vereinfachung ist? Es ist ja gewiss, dass, wenn $n > m$, das erhaltene Resultat $y = n-m$ genau ist.

Das ist wahr. Aber dies Resultat ist nur zufällig genau, und weil in den Schlüssen verschiedene Widersprüche sind, die sich einer den andern zerstören. Weil das aber nicht immer der Fall ist, so kommt man dann, wie wir vorher sahen, auf falsche Resultate. Noch mehr, hat man einmahl den Begriff angenommen, so ist man desto sicherer sich zu irren, je richtiger man schliesst. Man muss also einem Begriff entsagen, der so sehr geschaffen ist, Irrthum herbeyzuführen. Auch ist die angeführte Vereinfachung nichts weniger als wirklich. Denn im Gegentheil, die vorigen Schlüsse haben uns nur durch Umwege auf ein an sich evidentes Resultat geführt: nämlich dass der Unterschied $y$ von $m$ nnd $n$, der $m-n$ ist, wenn $m > n$, invers wird, d. h. $n-m$, wenn im Gegentheil $n > m$.

Dieser doppelte Irrthum, von dem wir sprachen, wird von denen selbst eingestanden, die den Begriff

der

der negativen Quantitäten annehmen, was sie dadurch ausdrücken: die Rechnung verbessere von selbst die falschen Hypothesen, auf die man sie gegründet haben könnte. Aber ist die Hypothese, von der man ausging, falsch, so ist schon ein Irrthum begangen, und verbessert die Rechnung ihn, so kann dies nur durch einen zweyten geschehen. Denn geht man von einem falschen Grundsatz aus, so ist man desto sicherer, auf ein eben so falsches Resultat zu kommen, je besser man schliesst. Also nur ein neuer entgegengesetzter Irrthum kann den ersten verbessern. Z. B. man hat $cof(a+b) = cof\,a \,.\, cof\,b - fin\,a \,.\, fin\,b$; da aber diese Formel blos für den Fall aufgestellt ist, wo $a$, $b$, und $a+b$, Winkel sind, die kleiner als ein Viertheil des Umkreises sind, so wird sie falsch, wenn man das Gegentheil annimmt.

Indessen die, die den Begriff der negativen Quantitäten zulassen, betrachten diese Formel als allgemein, und auf alle Fälle anwendbar; da diese Voraussetzung aber nicht richtig ist, so verbessern sie den Irrthum dadurch, dass sie sagen, $cof\,a$ und $cof(a+b)$ würden beyde negativ, man müsse also ihr Zeichen von + in — ändern, was folgendes Resultat giebt:

$$cof(a+b) = cof\,a \,.\, cof\,b + fin\,a \,.\, fin\,b.$$

Das Resultat ist wahr, aber eben weil es wahr ist, beweist es, dass die Voraussetzung: $cof\,a$ und $cof(a+b)$ seyen negativ, ein neuer Irrthum ist. Denn wäre es das nicht, so hätte nichts das Resultat der falschen Hypothese ersetzt, die gleich anfangs gemacht ward, nämlich dass die Formel auf alle Fälle anwendbar sey. Der Beweis, dass sie es nicht war, ist, dass sie,

wie man ſieht, für den neuen Fall wirklich verſchieden iſt. Davon kann man ſich leicht überzeugen, wenn man ſie geradezu durch die gewöhnliche Methode und durch bloſse Syntheſis ſucht, d. h. ohne den Begriff der negativen Quantitäten zu gebrauchen; eine Methode, die freylich nicht ſo ſchnell iſt, wie die Analyſis, aber deren Reſultate doch wenigſtens von niemand beſtritten werden.

So ſind die häufig gebrauchten Formeln

$cof(\pi + a) = -fin\ a$, $fin(2\pi + a) = -fin\ a$

und dergleichen, wo $\pi$ den vierten Theil des Umkreiſes bedeutet, falſche Gleichungen, die nur als ſimple algebraiſche Formen gebraucht werden können, und eben deswegen, weil ſie falſch ſind, einen begangenen Irrthum verbeſſern. Sie verbeſſern ihn wirklich in gewiſſen Fällen, indem ſie anzeigen, was man ſtatt der wahren Quantitäten $cof(\pi + a)$, $fin(2\pi + a)$ ſetzen müſſe, wenn man durch einen erſten Irrthum dieſelben Quantitäten $cof(\pi + a)$, $fin(2\pi + a)$ für $cof\ a$, $fin\ a$, in Formeln geſetzt hat, die nur für die letzten gefunden waren, und die unmittelbar und ohne Modifikationen nur auf die anwendbar ſind. Dieſe Ausdrücke, ſo wie $-fin\ a$, ſind das, was ich Werthe der Correlation der Quantitäten nenne, ſtatt deren man ſie in die Urformeln ſetzen muſs. So ſind dieſe Werthe der Correlation nichts anders, als bloſse algebraiſche Formen, die, in die Urformeln, ſtatt der wahren Quantitäten, die ſie vorſtellen, geſetzt, dieſe Formeln, auf anfangs nicht vorhergeſehene Fälle anwendbar machen, d. h. auf andere, als auf welche die Betrachtungen bey der Stel-

lung in Gleichung, oder bey dem Ausdruck der gegebenen Bedingungen gegründet waren. Aus dieſem Geſichtspunkt betrachtet, ſind dieſe algebraiſchen Formen ſehr nützlich, man muſs nur die Fälle genau beſtimmen, wo ſie paſſend gebraucht werden können. Und das bleibt mir zu unterſuchen.

Jetzt, nachdem ich gezeigt habe, wie falſch und dunkel die gewöhnlich angenommenen Begriffe von ſogenannten negativen Quantitäten ſind, bleibt mir nur übrig, die wahren Grundſätze der ſie betreffenden Lehre aufzuſuchen.

Hierzu nehme ich das vorige Beyſpiel wieder. Es ſey alſo überhaupt $y$ die Ordinate irgend eines Punktes, in Bezug auf $\overline{RS}$ genommen, $z$ die Ordinate deſſelben Punktes, in Bezug auf $\overline{VT}$, und die Beſtändige $\overline{Tp} = a$. Die vorigen Gleichungen geben uns alſo für den Punkt $D$, $y = z - a$, und für den Punkt $C$, $y = a - z$; daraus hat man geglaubt ſchlieſſen zu können, daſs, da $a - z$, $z - a$ negativ genommen iſt, $y$ in der That negativ werde, wenn man vom Punkte $D$ zum Punkte $C$ gehe. Aber der Fehlſchluſs iſt leicht zu erkennen. Sollte $y$ negativ werden, wenn es $a - z$ wird, ſo müſste $z$ gröſser als $a$ bleiben. $z$ wird aber im Gegentheil kleiner als $a$; alſo iſt $a - z$ dann poſitiv, alſo iſt $y$ immer poſitiv, es mag den Punkt $C$, oder den Punkt $D$ betreffen. Aber weil man im erſten Fall $y = z - a$ hat, und im zweyten $y = a - z$, ſo ſieht man, daſs, um von der Betrachtung des Punktes $D$ zu der des Punktes $C$ zu gehen, man in die Gleichung $-(z - a)$ ſtatt $+(z - a)$, oder $-y$ ſtatt $+y$ ſetzen müſſe. Dieſe Veränderung

beweiſet alſo nicht, daſs $y$ eine negative Quantität geworden ſey, ſondern bloſs, daſs von den beyden Quantitäten $a$, $z$, deren Unterſchied es iſt, die, welche die gröſste iſt, wenn $y$ zu $D$ gehört, die kleinſte wird, wenn $y$ zu $C$ gehört.

Daraus ſchlieſse ich:

1) daſs jede iſolirte negative Quantität nur ein Geſchöpf des Verſtandes ſey, und daſs die, welche man in der Rechnung findet, bloſse algebraiſche Formen ſeyen, unfähig, irgend eine wahre und wirkliche Quantität vorzuſtellen;

2) daſs jede dieſer algebraiſchen Formen, wenn man von ihren Zeichen abſtrahirt, nichts als der Unterſchied zweyer andern abſoluten Quantitäten ſey, von denen die, welche für den Fall, auf den man die Betrachtung gegründet hat, die gröſste war, die kleinſte für den Fall iſt, auf den man die Reſultate der Rechnung anwenden will.

Dieſer Grundſatz entſpricht allem, und hebt jede Art von Schwierigkeiten, ohne daſs es nöthig ſey, dieſe abſtrakten Begriffe einzumengen, über die die Mathematiker ſich nicht vereinigen können. Geht man auf einfache und verſtändliche Vorſtellungen zurück, ſo ſieht der Geiſt natürlich ein, daſs es in der That keine anderen Quantitäten geben könne, als die, welche man abſolute nennt, und daſs die Zeichen, die vielleicht vor ihnen ſtehen, keine Quantitäten, ſondern nur Verrichtungen bedeuten. So bilden dieſe

Zeichen zuſammen, mit dieſen Quantitäten genommen, keine neuen Quantitäten, ſondern complexe algebraiſche Formen.

Sagt man alſo von einer Quantität, daſs ſie negativ wird, ſo braucht man einen uneigentlichen Ausdruck, der leicht auf Irrthum führen kann, wie man ſchon vorher geſehen hat; der wahre Sinn, den man mit dieſem Ausdruck verbinden muſs, iſt, daſs dieſe abſolute Quantität nicht zu dem Syſtem gehöre, auf das die Betrachtungen gegründet ſind, ſondern zu einem andern, das mit dem erſten in einer gewiſſen Verbindung ſteht; ſo daſs, um darauf die, für das erſte Syſtem gefundenen, Formeln anwendbar zu machen, man das Zeichen, was vorhergeht, von $+$, in $-$ verändern muſs.

Aber daher, daſs man $-y$ ſtatt $+y$ ſetzen muſs, folgt nicht, daſs die durch $y$ vorgeſtellte Quantität negativ geworden ſey, ſondern bloſs, wie ich bewieſen habe, daſs ſie der Unterſchied zweyer andern Quantitäten $a$, $z$, iſt, von denen die, welche in dem Syſtem, auf das die Betrachtungen gegründet, und für das die Formeln gefunden ſind, die gröſste war, in dem Syſtem, auf das man dieſe Formeln anwenden will, die kleinſte geworden iſt. Denn da, nach der Hypotheſe, die durch $y$ vorgeſtellte Quantität beſtändig der Unterſchied zweyer Quantitäten $a$, $z$, iſt, ſo wird ſie bald $a-z$, bald $z-a$ ſeyn, nachdem $z$ kleiner oder gröſser als $a$ iſt, aber in allen Fällen wird ſie die gröſsere dieſer Quantitäten, weniger die kleineren, und folglich immer poſitiv ſeyn. Eben ſo wird der Ausdruck $-y$ immer nur eine algebraiſche

Formel ſeyn, an ſich unbedeutend, aber die die Eigenſchaft hat, daſs, wenn ſie in die gefundenen Formeln ſtatt $+y$ geſetzt wird, ſie dieſe Formeln auf gleich anfangs nicht beachtete Fälle, oder die wenigſtens nicht in der Zahl derer ſind, auf die die Betrachtungen urſprünglich gegründet waren, anwendbar macht.

Man wirft mir vielleicht ein, wenn die negativen Quantitäten ungereimte Weſen wären, ſo könnten ſie nie die wahre Auflöſung der in Gleichung geſtellten Aufgabe geben. Und doch iſt es ausgemacht, fährt man fort, daſs, wenn $y$ eine unbekannte Linie iſt, und für ſie ein negativer Werth gefunden wird, man die wahre Auflöſung der in Gleichung geſtellten Aufgabe erhält, wenn man den abſoluten gefundenen Werth nach einer Richtung trägt, die der, welche man annahm, gerade entgegengeſetzt iſt. Alſo, ſchlieſst man, iſt dieſe abſolute Quantität, in einer Richtung genommen, die der angenommenen entgegen iſt, nichts anders, als der, durch die Gleichung gegebene, negative Werth ſelbſt.

Hierauf antworte ich, daſs die als beſtändig angeführte Thatſache ganz falſch iſt, daſs man in keinem Fall die wahre Auflöſung der in Gleichung geſetzten Aufgabe erhalten kann, wenn man die negativen Wurzeln nach einer Richtung trägt, welche der angenommenen gerade entgegengeſetzt iſt, daſs man ſo immer die Auflöſung einer andern Aufgabe erhält, die mehr oder weniger mit der, die man wirklich in Gleichung geſetzt hat, einerley iſt, aber die ſich immer von ihr durch irgend eine beſondere

Bedingung unterſcheidet. Was hier leicht täuſcht, iſt, daſs man bisweilen, wenn man die negative Wurzel nach entgegengeſetzter Richtung trägt, in der That eine von den Auflöſungen der vorgenommenen Aufgabe erhält, und indem man dieſe mit der in Gleichung geſetzten verwechſelt, auf die letzte anwendet, was nur für die erſte wahr iſt. Denn dann iſt die in Gleichung geſetzte Aufgabe nicht die angenommene, ſondern nur ein beſonderer Fall von ihr, und dieſer beſondere Fall gerade wird nicht durch die negativen Wurzeln aufgelöſt. So alſo, indem man die negativen Wurzeln nach entgegengeſetzter Richtung trägt, löſt man nicht die in Gleichung geſetzte Aufgabe auf, ſondern andere, beſondere Fälle einer allgemeinern Aufgabe.

Der Irrthum, der daraus entſteht, daſs man nicht Sorge trägt, die wirklich in Gleichung geſetzte Aufgabe von der vorgenommenen Aufgabe zu unterſcheiden, muſs um ſo viel eher gerügt werden, je leichter man ihn überſieht, und weil aus ihm die ganze falſche Theorie der ſogenannten negativen Quantitäten entſtanden iſt.

Eine Folge dieſes Irrthums iſt es, daſs man ohne weitern Grund annimmt, dieſelbe Gleichung könne ohne alle Modifikationen auf alle Gegenden des Raums angewendet werden; z. B. eine zwiſchen zwey Veränderlichen gegebene Gleichung könne, ohne Unterſchied, auf Punkte, die rechts oder links, unten oder oben an den Axen der Curve liegen, deren Natur ſie ausdrückt, angewendet werden. Das iſt ſehr bequem, aber nicht wahr. Es als Grundſatz aufſtellen

heifst eben so viel, als die zu untersuchende Sache annehmen. Man sieht leicht, dafs, wenn man das Recht hätte, die gegebene Gleichung, ohne alle Modifikation, auf alle Gegenden der Curve anzuwenden, eben dadurch die Ordinaten links von der Axe der Abscissen genommen $-y$, und die Abscissen unter der Axe der Ordinaten genommen $-x$ seyn würden. Aber wir haben bewiesen, dafs $-x$ und $-y$ blofse Geschöpfe des Verstandes sind, d. h. blofse algebraische Formen, die keine wirkliche Quantität vorstellen können. Also ist man nicht berechtigt, ohne Modifikation die gegebene Gleichung auf alle Gegenden der Curve anzuwenden.

Man mufs also allen Begriffen von negativen Quantitäten, als wirklichen Wesen, entsagen, und sich darauf beschränken, sie so, wie sie sind, zu betrachten, d. h. wie blofse algebraische Formen, die geeignet sind, die Formeln, welche wirklich die Bedingungen ausdrücken, auf Fälle anwendbar zu machen, die nicht in dem Ausdruck dieser Bedingungen begriffen sind. Man glaube ja nicht, dafs aus dieser Art, die negativen Quantitäten zu betrachten, irgend eine Verwickelung in der Rechnung entstehe. Nichts wird dadurch bey dem Verfahren geändert, alles kommt darauf zurück, eine einfache und richtige Vorstellung statt einer falschen und unnützen zu setzen, und das ist der Zweck dieses Werks. Ich glaube ihn erfüllt zu haben, indem ich für den bestrittenen Begriff von positiven und negativen Quantitäten, den Begriff der Quantitäten gesetzt habe, die ich direkte und inverse nenne.

Dieſe Quantitäten, die ich direkte und inverſe nenne, ſind gewöhnliche oder abſolute Quantitäten, wo jede aber als der veränderliche Unterſchied zweyer andern Quantitäten betrachtet wird, von denen jede wechſelsweiſe bald gröſser, bald kleiner als die andere wird. Wenn die, welche gleich anfangs die gröſsere war, d. h. in dem Syſteme, auf welches man die Betrachtungen gegründet hat, beſtändig die gröſsere bleibt, ſo heiſst die Quantität, welche den Unterſchied ihrer abſoluten Werthe ausdrückt, eine direkte Quantität; wird ſie aber kleiner, ſo heiſst dieſer Unterſchied eine inverſe Quantität. So verſchwindet die ganze Metaphyſik der poſitiven und negativen Quantitäten. Es bleiben nur direkte und inverſe Quantitäten noch, die eben ſo gut, wie alle denkbaren Quantitäten, abſolut ſind. Nach den verſchiedenen Umſtänden, in denen ſie ſich befinden, muſs man das Zeichen, das in den Formeln vor ihnen ſteht, behalten oder verändern, und die Theorie dieſer Veränderung nenne ich Geometrie der Stellung, weil man durch ſie die verſchiedenen Stellungen entſprechender Theile in Figuren derſelben Art ausdrückt. So iſt alſo das, was ich Geometrie der Stellung nenne, nichts anders als gewöhnliche Geometrie, in der die Lehre von poſitiven und negativen Quantitäten, durch die Lehre von direkten und inverſen erſetzt iſt.

De Velay, Profeſſor der Mathematik zu Lauſanne, hat ſich ſchon in ſeiner *Introduction à l'Algèbre*, die 1799 herauskam, der Benennung direkter und inverſer Quantitäten bedient. Ich wuſste es nicht, wie

ich mich zu denſelben Benennungen in meinem *Traité de la corrélation des figures* beſtimmte. Dieſs ſonderbare und für mich ſchmeichelhafte Zuſammentreffen beweiſt, daſs dieſe Ausdrücke bey der Behandlung dieſes Gegenſtandes ſich gleichſam von ſelbſt darbieten, zumal da die Theorie des Bürgers de Velay und die meinige durchaus nichts mehr als dieſe Benennungen gemein haben, die ſelbſt nicht einmal ganz in derſelben Bedeutung von ihm genommen werden, in der ich ſie nehme.

Den erſten Abſchnitt dieſes Werkes habe ich der Entwickelung dieſer Begriffe beſtimmt, und um daraus die wichtigſten Folgerungen zu ziehen. Ich gebe darin Beweiſe, daſs die gewöhnliche Theorie in dieſer Hinſicht wenigſtens ſehr unbeſtimmt iſt; daſs die Zahl der poſitiven oder negativen Wurzeln einer Gleichung weder die Zahl der Auflöſungen, deren die Aufgabe fähig iſt, noch die Richtung, in der ſie genommen werden ſollen, genau anzeigt; daſs bald überflüſſige da ſind, bald wirkliche unterdrückt, bald negative, die in derſelben Richtung wie poſitive genommen werden, bald ſogar poſitive, die falſch oder unbedeutend ſind. Ferner, daſs alle dieſe Wurzeln algebraiſch genau ſind, daſs man ſie durch Umformungen brauchbar machen kann, und daſs allein durch den Gebrauch dieſer negativen oder eingebildeten Formen als wirklicher Quantitäten ſich die Analyſis von der Syntheſis unterſcheidet, und einen ſo groſsen Vortheil über ſie erhält.

Mit dieſem Hauptbegriff von direkten und inverſen Quantitäten, der beſonders den Gegenſtand des

erſten Abſchnittes ausmacht, verbinde ich andere, die mir den Titel dieſes Werks, Geometrie der Stellung, zu rechtfertigen ſcheinen. Ich ſtelle eine Art dar, um durch beſondere Charaktere und ſyſtematiſche Anordnung der Buchſtaben, die die Hauptpunkte einer Figur bezeichnen, die Modifikationen auszudrücken, die ſie durch Veränderung der Stellung dieſer Hauptpunkte erdulden kann. Daraus entſpringt eine Art von Mechanismus, den ich geeignet glaube, die Analogie, welche Figuren derſelben Gattung unter einander verbindet, fühlbarer darzuſtellen, und ſo die für eine gefundenen Formeln nach der Reihe auf alle andern anwendbar zu machen. Die Auseinanderſetzung dieſer Art iſt der Gegenſtand des zweyten Abſchnittes, dem ich nicht alle Entwickelung gegeben habe, deren er fähig iſt, die er aber leicht erhalten wird, wenn die darin aufgeſtellten Ideen von den Gelehrten angenommen werden.

Ich weiſs, daſs man ſehr behutſam mit der Einführung ungewöhnlicher Ausdrücke ſeyn muſs, aber wenn ſie ſo einfach ſind, daſs man ſie nur ein einziges Mal zu ſehen braucht, um ſich nicht mehr darin zu irren, wenn dadurch Redensarten, die man alle Augenblicke gebrauchen muſs, kurz und klar werden, ſo kann man ſie, wie ich glaube, als vortheilhaft betrachten. Noch dazu habe ich einen ſehr ſparſamen Gebrauch von ihnen gemacht.

Unter den verſchiedenen Beyſpielen, die ich von meiner Theorie in dieſem zweyten Abſchnitte gebe, befindet ſich eine allgemeine Lehre der Correlation, der Lineo-angulair-Quantitäten, d. h. der Sinus, Co-

ſinus, Tangenten, die den verſchiedenen Gegenden des Umkreiſes entſprechen. Ich glaube darin die wahre Theorie der Veränderung der Zeichen gegeben zu haben, welchen dieſe Arten von Quantitäten unterworfen ſind. Nachher komme ich auf die Methode der Alten zurück, die Bogen unmittelbar mit ihren Sehnen zu vergleichen, ſtatt mit den halben Sehnen der doppelten Bogen, was im Grunde daſſelbe iſt, aber ein natürlicheres und oft einfacheres Mittel giebt, die Verhältniſſe dieſer Quantitäten darzuſtellen. Bey derſelben Gelegenheit ſtelle ich einige Formeln auf, die, wie ich glaube, noch nicht gegeben ſind, um die Verhältniſſe, durch ſymmetriſche Ausdrücke, unter allen verglichenen Bogen darzuſtellen.

Die andern Abſchnitte ſind dazu beſtimmt, um die in den zwey erſten entwickelten Grundſätze anzuwenden, aber ich habe dabey noch eine andere Abſicht gehabt, die mir eben ſo wichtig ſchien, die nämlich, eine Methode zu erklären, vermöge der man durch analytiſche Tafeln das Ganze der Eigenſchaften irgend einer vorgeſtellten Figur entwickeln, und gleichſam ſo eine vollſtändige Aufrechnung dieſer Eigenſchaften, ſo wie der Eigenſchaften aller Figuren, die ſich auf ſie beziehen laſſen, machen kann.

Hierzu betrachte ich dieſe Figur gleich Anfangs als einen Ausdruck der Vergleichung, oder als eine Urfigur, und nenne correlative Figuren diejenigen, die man mit ihr vergleichen will.

In der Urfigur ſelbſt nehme ich aus den Quantitäten, aus denen ſie beſteht, ſo viel als nöthig ſind, um aus ihnen die übrigen zu beſtimmen. Habe ich dieſe

meine Grundſtützen erwählt, ſo drücke ich alle andere Theile dieſes Urſyſtems bloſs in Werthen von ihnen aus, und bilde ſo die allgemeine Tafel. Dieſe Tafel umfaſst augenſcheinlich alle geſuchten Verhältniſſe der verſchiedenen Theile dieſer Urfigur, weil ſie das Mittel an die Hand giebt, ſie alle zwey und zwey durch Hülfe der Urquantitäten zu vergleichen, die man als gemeinſchaftliche Ausdrücke der Vergleichung annimmt. Da eben dieſe Urfigur als der wirkliche und exiſtirende Gegenſtand angenommen iſt, auf den die Betrachtungen gegründet ſind, ſo können auch die Formeln, welche die Verhältniſſe ſeiner verſchiedenen Theile ausdrücken und die allgemeine Tafel ausmachen, von der wir geredet haben, nur wirkliche und verſtändliche Ausdrücke enthalten, keine unausführbare Verrichtung, keine ungereimte Quantität anzeigen. Man wird alſo keine iſolirte negative Quantität darin antreffen, weil eine ſolche Quantität nur ein Geſchöpf des Verſtandes iſt, viel weniger eine eingebildete Quantität, d. h. die in dieſen Formeln vorkommenden Zeichen, + und —, drücken nur darin Verrichtungen aus, die man ausführen kann, und müſſen als bloſse Abkürzungen betrachtet werden.

Iſt dieſe Tafel der Eigenſchaften der Urfigur einmal aufgeſtellt, ſo muſs man wiſſen, welche Modifikationen damit vorzunehmen ſind, damit ſie in der Folge eben ſo die Eigenſchaften der correlativen Figuren darſtelle. Da die Conſtruktion einer jeden von dieſen weſentlich dieſelbe mit der Conſtruktion der Urfigur iſt, ſo müſſen die Formeln, die deren Eigenſchaften ausdrücken, um ſo viel mehr Analogie mit

den Formeln der Urfigur haben, als weniger Ungleichheit unter ihnen iſt; die ſich entſprechenden Quantitäten müſſen auf dieſelbe Art, in Hinſicht auf ihre eigenthümlichen oder abſoluten Werthe, ſich darin verbunden finden; man braucht alſo nur die Verſchiedenheit der Stellungen auszudrücken, und das geſchieht durch die Veränderung der Zeichen, welche dieſe Quantitäten oder die verſchiedenen Glieder der Formeln in der Tafel afficiren.

Um die Veränderungen zu entdecken, die in der That für ein beſtimmtes, correlatives Syſtem ſtatt haben müſſen, ſo nehme ich an, daſs es durch eine unmerklich fortſchreitende Umformung, die nichts an den allgemeinen Grundlagen der erſten Conſtruktion verändert, entſtanden ſey, eine Umformung, die nur die jedesmaligen Lagen modificirt, indem ſie oben ſetzt, was unten, oder rechts, was links war. Aus dieſer ſtufenweiſen Bewegung folgt, daſs eine Quantität des Syſtemes, die anfangs kleiner war als eine beſtimmte andere, nachher gröſser wird, und ſo auch umgekehrt. Nun entſteht der allgemeine Grundſatz der Veränderung der Zeichen, die in den Formeln des Urſyſtems ſtatt haben muſs, damit ſie auf das Umgeformte oder Correlative anwendbar werden, bloſs daher, und nicht, weil dieſe Quantitäten eine der andern entgegengeſetzt ſeyn würden.

Im dritten Abſchnitte ſetze ich bey verſchiedenen Figuren die Tafeln ins Werk, von denen ich anfangs ſprach, wodurch man nämlich das Ganze der Verhältniſſe darſtellen kann, die unter den verſchiedenen Theilen einer jeden beſtehen. Nachher füge ich jeder

die Tafel der Correlation bey, aus der man die Veränderungen ſieht, die man in der Urtafel machen muſs, um dieſe auf jedes correlative Syſtem anwendbar zu machen.

Der vierte Abſchnitt enthält neue Anwendungen derſelben Grundſätze auf Eigenſchaften, die man in den Figuren, ohne Zuziehung der Lineo-angulair-Quantitäten finden kann. Die Lineo-angulair-Quantitäten nämlich ſind Vermittler, um die Linien mit den Winkeln zu verbinden, und die Verhältniſſe, die unter ihnen beſtehen, aufzuſtellen. Aber in dieſem Abſchnitte unterſuche ich theilweiſe, von der einen Seite die Verhältniſſe, die bloſs zwiſchen den Winkeln beſtehen, von der andern die, die nur unter den Linien ſtatt haben; ich gebe darin den Begriff des Mittelpunktes der mittleren Entfernungen. Dabey bemerke ich, daſs dieſer Punkt mit dem Schwerpunkt in der Mechanik einerley iſt, und ſchlieſse daraus, daſs die Theorie dieſes Punktes für die Geometrie gehört, und daſs es ſehr vortheilhaft für die Ausbildung dieſer Wiſſenſchaft wäre, wenn man in dieſer Hinſicht die natürliche Reihe der Begriffe wieder herſtellte.

Im fünften Abſchnitte wende ich die vorher aufgeſtellten Grundſätze auf eine Reihe beſonderer Fragen an, die zu denen gehören, welche man auf Geometrie angewandte Algebra zu nennen pflegt. Dabey erhalte ich Gelegenheit, durch viele Beyſpiele zu zeigen, daſs die gewöhnlich angenommene Theorie über die ſogenannten poſitiven und negativen Quantitäten nicht zureicht, und daſs man durch Wahl der unbe-

kannten und gegebenen Gröfsen bisweilen, nach Leibnitzens Idee, die Stellung in den Ausdruck der Bedingungen der Aufgabe bringen, und ſo den natürlichen Grad der Endgleichung vermindern könne. Aus dieſen verſchiedenen Unterſuchungen entſpringen einige merkwürdige Formeln, z. B. die Bedingungsgleichung zwiſchen den 6 Winkeln, welche die 4 Seitenflächen einer Triangulär-Pyramide bilden.

Endlich im ſechſten und letzten Abſchnitte wende ich meine Tafeln, um das Ganze der Eigenſchaften der Zeichen darzuſtellen, auf Curven an. Ich entwickele hier den lichtvollen Wink, welchen Godin in ſeinem *Traité des propriétés communes à toutes les courbes* gab, daſs die Kunſt, Eigenſchaften der Curven zu entdecken, genau genommen nur die Kunſt ſey, das Syſtem der Coordinaten zu verändern, und ich zeige dieſe Verrichtung in verſchiedenen Beyſpielen. Meine Abſicht dabey war nicht, eine ausführliche Abhandlung über Curven zu ſchreiben, ich wollte bloſs Veränderung in die Anwendung meiner Grundſätze bringen, und zeigen, daſs man die Bildung der vorher bemerkten Tafeln auf Curven und Oberflächen eben ſo gut, wie auf gerade Linien und Ebenen anwenden könne. Man wird in dieſem Abſchnitte viele merkwürdige, und, wie ich glaube, nicht bekannte Eigenſchaften der Kugelſchnitte finden, ſo wie eine ziemlich bemerkenswerthe Theorie über die Punkte des Zuſammentreffens mehrerer Linien, und über dieſs im Gegentheil, die ſich auf derſelben geraden Linie geordnet befinden. Endlich noch mehrere Eigenſchaften der Curven überhaupt, wodurch ich

vorzüg-

vorzüglich dieſs bezweckte, ihre Gleichung unabhängig von jedem Punkt, jeder Linie, jeder Ebene, oder überhaupt von jedem feſten Gegenſtande zu machen, den man willkührlich im Raum der Curve, oder in der Curve ſelbſt, annimmt.

Der gröſste Theil der in dieſem Werke abgehandelten Fragen gehört in die Elementar-Geometrie. Aber wenn man bedenkt, daſs es eben dieſe Geometrie iſt, die ſo fruchtbar in den Händen eines Hipparchs, Archimeds, eines Apollonius war; daſs es die einzige iſt, welche Neper, Vieta, Fermat, Galilei, Pascal, Huygens und Roberval kannten; wenn man bedenkt, daſs Newton, Halley und Maclaurin ſie mit einer Art von Vorliebe bearbeiteten, ſo kann man leicht denken, daſs dieſe Geometrie ihre Vorzüge haben müſſe. In der That iſt man heutiges Tages ziemlich darüber einverſtanden, daſs der vorzüglichſte Nutzen der ſtrengen Wiſſenſchaften, wenn man ſie weiter treibt, als zum Hausbedarf der Künſte nöthig iſt, darin beſteht, den Geiſt an Betrachtung, an Genauigkeit und Verkettung der Ideen zu gewöhnen. Dieſs iſt nun vorzugsweiſe der Zweck der Geometrie der Alten. Denn heiſst ſie Elementar-Geometrie, in Hinſicht auf den Gegenſtand, mit dem ſie ſich beſchäftigt, ſo iſt ſie es doch keinesweges in Hinſicht auf ihre Schwierigkeiten, worin ſie nicht den analytiſchen Unterſuchungen weicht. Auch iſt die Metaphyſik der Wiſſenſchaften eben nicht ihr unintereſſanteſter Theil, und es iſt von groſser Wichtigkeit, alle falſchen Ideen daraus zu verbannen. Wer aber

den Gegenſtand, mit dem er ſich beſchäftigt, erſchöpfen will, für den trägt der Begriff der ſogenannten negativen Gröſsen dieſen Charakter, und doch dient er den vorzüglichſten Verrichtungen der Algebra zur Grundlage, ja die algebraiſche Analyſis beruht ganz auf ihm. Die Bemühungen, welche die gröſsten Geometer anwandten, dieſen Punkt der Wiſſenſchaft aufzuklären, und die Streitigkeiten, die er verurſacht hat, rechtfertigen hinlänglich ein Unternehmen, deſſen Hauptzweck darin beſteht, die Falſchheit und abſolute Unnützlichkeit dieſes Begriffes zu zeigen, und dafür einen andern zu ſetzen, der Einfachheit und Strenge verbinde, indem man bloſs auf die natürlichen Ideen, die ſich zuerſt jedem anbieten, zurückgeht.

Betrachtet man ferner das, was man heutiges Tages Elemente der Geometrie nennt, ſo muſs man über den eingeſchränkten Sinn, den man ihnen giebt, erſtaunen. Die Wiſſenſchaft der Projektionen, oder die beſchreibende Geometrie, iſt nicht darin begriffen, ſondern macht noch eine beſondere Wiſſenſchaft aus. Und doch was iſt mehr elementär, mehr nützlich für die Ausübung der Künſte, als gerade dieſe Lehre von den Projektionen auf horizontalen und vertikalen Ebenen? Man wendet mir vielleicht ein, daſs das keine Grundſätze der Geometrie, ſondern Theile ihrer Anwendung ſind. Das kann wahr ſeyn, aber daſſelbe kann man von vielen Sätzen ſagen, die man gemeiniglich in den Elementen antrifft. Es iſt nicht leicht, oder vielmehr, es iſt unmöglich, das, was man in

dieſer Hinſicht Grundſätze nennt, von dem zu trennen, was man Anwendung nennt. Es ſcheint, daſs das, was man Grundſätze nennt, eine Sammlung von Wahrheiten ſeyn müſſe, die, einmal recht erkannt, hinreichen, um die Anwendung auf die beſondern, gemeinſten Fälle leicht zu machen. Wenn dieſs iſt, ſo behaupte ich, daſs die gewöhnlichen Elemente nicht hinreichen, denn der Uebergang von dieſen Elementen zu der Wiſſenſchaft der Projektionen erfordert neue Lehren und beträchtliche Auseinanderſetzungen, in die man ſich hinein arbeiten muſs.

Was ich hier über die Lehre von den Projektionen geſagt habe, gilt auch von den meiſten andern Gegenſtänden der Geometrie. Z. B. die Lehre von Polygonen und Polyedern iſt kaum darin berührt. Es iſt wahr, ſie iſt, wenn man will, mit in der Trigonometrie begriffen, aber das iſt auf eine ſo implicirte Art, daſs der Uebergang von der einen zur andern, weit entfernt, als eine leichte Anwendung betrachtet werden zu können, vielmehr eine ſehr geübte Einbildungskraft erfordert. Bey alle dem ſind eine Menge auffallender und nützlicher Eigenſchaften gar nicht bemerkt. Eben ſo iſt es mit den Eigenſchaften des Schwerpunktes, der wirklich zur Geometrie gehört, und deſſen praktiſche Wichtigkeit eben ſo ausgedehnt, als unbeſtritten iſt.

Endlich, was man gewöhnlich unter dem Namen Elementar-Geometrie begreift, iſt nichts anders, als eine methodiſche Sammlung von den einfachſten und gewöhnlichſten Eigenſchaften der Figuren, die aus

geraden Linien und Umkreiſen von Cirkeln beſtehn. Freylich geſteht jeder, daſs auch in dieſer Hinſicht nur es immer ein groſses Verdienſt bleibt, gute Elemente zu machen, d. h. dieſe Eigenſchaften auf die deutlichſte und für Schüler nützlichſte Weiſe zu ſammeln, zu ordnen und zu beweiſen. Aber dennoch giebt dieſe Geometrie, wie ich ſchon bemerkt habe, mag ſie noch ſo gut geordnet ſeyn, als Reſultat, nur eine Sammlung von Lehrſätzen, die ſelbſt in Rückſicht auf ihren beſondern Gegenſtand (die gerade Linie und den Cirkel) ſehr unvollſtändig iſt. Um den Gegenſtand ganz zu erſchöpfen, muſs man, wie es mir ſcheint, zur Auflöſung dieſer allgemeinen Aufgabe gelangen:

Wenn in irgend einem Syſtem von geraden Linien, mögen ſie in derſelben Ebene, oder nicht gezogen ſeyn, einige von ihnen, oder Winkel, die aus ihrer Verſammlung entſtehen, es ſey zwiſchen ihnen ſelbſt, oder zwiſchen den Ebenen, in denen ſie liegen, in hinreichender Anzahl gegeben ſind, um die Figur zu beſtimmen, die übrigen zu finden. Nun ſind die gewöhnlich ſogenannten Elemente der Geometrie weit von dieſer allgemeinen Aufgabe entfernt.

Man ſieht hieraus, daſs es nicht darauf ankommt, die gewöhnlichen Elemente mit einer groſsen Anzahl neuer Sätze zu vermehren, ſo auffallend ſie auch immer ſeyn mögen, ſondern nur darauf, zur Auflöſung einer allgemeinen Aufgabe zu kommen, welche ſie

alle wie besondere Fälle in ihren Erklärungen enthalten, und aus der sie sich durch eine vielfache Combination von Formeln leiten lassen. Ich habe die Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe im fünften Abschnitt gegeben, oder vielmehr nur angezeigt; aber um ihre Anwendung auf jede besondere Figur leichter zu machen, habe ich in den vorhergehenden Abschnitten die Bildung einer Tafel erfunden und aus einander gesetzt, welche das Ganze der Eigenschaften einer Figur darstellen kann, welche alle ihre partiellen Verhältnisse unter einen Gesichtspunkt bringt, und endlich, indem ich eben diese Figur als Maasstab zur Vergleichung brauche, habe ich durch hinzugefügte Tafeln, die ich Tafeln der Correlation nenne, alle die darauf bezogen, deren Konstruktion wesentlich dieselbe ist. Die erste von diesen Tafeln ist nun eine vollständige Aufzählung aller Theile (lineäre, anguläre, superficielle u. s. w.), welche zur Zusammensetzung der Urfigur gehören, alle in Werthen von irgend welchen unter ihnen ausgedrückt, die in hinlänglicher Anzahl angenommen werden, damit, wenn man sie als bekannt annimmt, alle übrigen bestimmt sind. Die andern, nämlich die Tafeln der Correlation, zeigen die Veränderungen an, die mit dieser Urtafel vorgehen müssen, wenn man sie auf irgend eine Figur derselben Gattung, oder auf eine correlative anwenden will, d. h. die nicht wesentlich von der ersten verschieden ist, sondern nur durch einige Modifikationen, oder durch die Verschiedenheit der Stellung sich entsprechender Theile sich auszeichnet.

Da nun dieſe Verſchiedenheit in der jedesmaligen Stellung der ſich entſprechenden Theile vorzüglich durch die Verſchiedenheit der Zeichen + und — ausgedrückt wird, ſo zwingt mich die Natur meines Gegenſtandes, das, was man poſitive und negative Quantitäten nennt, zu behandeln. Das habe ich nun mit einer Ausführlichkeit gethan, die freylich zu weit ginge, wenn ich nicht hier Ideen zu bekämpfen hätte, die ſo allgemein angenommen ſind, daſs man ſie beynahe für Axiomen anſehen könnte. Weil die Theorie der Veränderungen, die aus der verſchiedenen Stellung ſich entſprechender Theile der Figuren einer Art entſtehen, die Grundlage dieſer Abhandlung iſt, ſo habe ich ihr den Namen, Geometrie der Stellung, gegeben. Nicht um dadurch anzuzeigen, daſs ſie einen, von dem der gewöhnlichen Geometrie verſchiedenen, Gegenſtand hätte, ſondern nur, um die von mir vorgeſchlagene Art zu charakteriſiren, ſowohl das Ganze der Verhältniſſe der Urfigur auszudrücken, als auch die Veränderungen der Stellung, die dabey eintreffen können.

Das Fundamentalprincip meiner Theorie iſt, daſs der Begriff iſolirter, negativer Quantitäten unzuläſsig ſey. Alſo um die Vorſtellungen genau zu beſtimmen, nenne ich Geometrie der Stellung diejenige,

> in der der Begriff der poſitiven und iſolirten negativen Quantitäten durch den Begriff der direkten und inverſen Quantitäten erſetzt iſt.

Dieſe Begriffe ſind ſowohl hier (in der vorläufigen Abhandlung), als auch im erſten Abſchnitte

weitläuftig entwickelt. In den übrigen Theilen des Werks habe ich mich ſo viel als möglich beſchränkt, ja oft nur den Leſer auf den Weg des Beweiſes geführt, und doch iſt das Buch ſtärker, als ich mir vorgenommen hatte, geworden; denn anfangs wollte ich nur eine neue Ausgabe meines *Traité de la corrélation des figures* veranſtalten. Aber die Methode, Geometrie in Tafeln zu behandeln, eröffnet ein ſo weites und ſo fruchtbares Feld, daſs man nur mit den intereſſanten Reſultaten, die daraus entſpringen, leicht einige Bände füllen könnte. Und dieſe Reſultate finden ſich gedrängt darin, denn jede Linie einer Tafel iſt, genau genommen, ein in Formeln gebrachter Lehrſatz. Man braucht dieſe Formeln nur zu klaſſificiren und ſo zu ordnen, daſs man gleich die nöthigen finden kann, wie man z. B. in den logarithmiſchen Tafeln den Logarithmus einer Zahl findet. Noch mehr, ich glaube, daſs dieſe Methode auf alle andere Zweige der Mathematik angewendet werden kann, und weiſs, daſs ich hier nur einen ſehr unvollkommenen Verſuch gebe, aber wenn ich mich nicht irre, ſo kann dieſer Verſuch die Grundlage einer nützlichen Arbeit werden.

Die Geometrie der Stellung, welche hier abgehandelt wird, iſt nicht, was verſchiedene Gelehrte Geometrie der Lage genannt haben. Unter Geometrie der Lage verſteht man gewöhnlich eine Klaſſe von Unterſuchungen, die, obgleich aus der Sphäre der Geometrie, ſich doch nicht unter die algebraiſche Analyſis zu fügen ſcheinen; da im Gegentheil die

Geometrie der Stellung, welche ich hier behandle, nur eine Art ist, die Anwendung der Algebra auf gewöhnliche Geometrie fruchtbarer zu machen. Die Geometrie der Lage ist, so viel ich weiss, nie besonders behandelt worden. Man findet einige Beyspiele davon in Oranams und Montucla's *Recréations mathématiques:* dahin gehört auch eine Aufgabe, die Euler in den Abhandlungen der Akademie zu Petersburg auflöste, nämlich, welchen Weg man bey Brücken über einen Fluss, der sich schlängelt, zu nehmen habe, wenn man nie zweymal über dieselbe Brücke gehen darf. In diesen Zweig der Geometrie gehören auch des verstorbenen Vandermonde scharfsinnige Untersuchungen über den Gang des Fadens, der nach und nach alle Maschen einer gestrickten Arbeit bildet. Man sieht aus diesem letzten Beyspiel, dass also dieser Zweig der Geometrie ganz dazu geeignet ist, auf eine übereinstimmende und leichte Weise das verschiedene Verfahren der Künste zu beschreiben, und in dieser Rücksicht kann sie unendlich nützlich werden. Aber es scheint mir, dass der Name, Geometrie der Stellung, weniger passend dafür ist, wie z. B. Geometrie der Versetzung wäre, weil in der That die Bewegung oder die Versetzung der Theile des Systems als ein wesentliches Element in alle solche Fragen kommt, und weil sie eigentlich zur Geometrie der Stellung sich wie Bewegung zur Ruhe verhält. Noch dazu ist sie nur der geringste Theil einer sehr umfassenden und wichtigen Wissenschaft, die noch nie behandelt ist, ich meyne überhaupt die Theorie der Bewegung,

abſtrahirt von allen Kräften, die ſie hervorbringen oder verſetzen. So z. B., wenn ich mir vornehme, mit dem Springer alle Felder des Schachbretts zu durchlaufen, ohne je zweymal über daſſelbe zu kommen, ſo iſt mir ſehr wenig daran gelegen, zu wiſſen, was die Maſſe dieſes Springers iſt, oder wie groſse Kraft ich brauchen muſs, um ihn zu bewegen. Eben ſo, wenn ein Faden die Maſchen einer Strickarbeit bildet, kommt es gar nicht auf die Geſetze der Aktion und Reaktion, noch auf die Kraft, mit der der Faden geſpannt wird, an. Derſelbe Fall tritt endlich bey allen Maſchinen ein, deren Zweck nicht Erſparung der Kraft iſt, ſondern wo nur gewiſſe Verhältniſſe zwiſchen den Richtungen und den Schnelligkeiten verſchiedener Punkte eines Syſtems aufgeſtellt werden ſollen. Ich werde in einem andern Werke auf den Begriff dieſer Bewegungen zurückkommen, deren Gränzen ich ſchon ſonſt geometriſche Bewegungen genannt habe, und deren Theorie der Uebergang von der Geometrie zur Mechanik iſt.

In dem, was ich hier Geometrie der Stellung nenne, wird keine Bewegung oder Verſetzung der Theile unterſucht, ſondern bloſs, wie ich ſchon vorher ſagte, eine neue Methode, den Anwendungen der Algebra auf die Geometrie mehr Ausdehnung zu geben, entwickelt. So habe ich alſo mit dieſem Namen eine Theorie bezeichnet,

„deren beſonderer Zweck es iſt, durch vergleichende Tafeln die verſchiedenen Stellungen ſich

entſprechender Theile der Figuren von einerley Gattung auszudrücken," nachdem vorläufig die allgemeine Tafel ihrer gemeinſchaftlichen Eigenſchaften gebildet iſt.

Das iſt denn nun der wahre und einzige Zweck des gegenwärtigen Werks.

# Geometrie der Stellung.

1. Die Geometrie der Stellung unterſucht beſonders die Verbindung, welche zwiſchen den jedesmaligen Lagen der verſchiedenen Theile einer vorgegebenen Figur und ihren komparativen Werthen ſtatt findet.

Es beſtehen unter den Theilen jeder geometriſchen Figur zwey Arten Verhältniſſe, die Verhältniſſe der Gröſse und die Verhältniſſe der Stellung. Die erſten finden unter den abſoluten Werthen der Quantitäten ſtatt; die andern drücken ihre jedesmaligen Stellungen aus, indem ſie anzeigen, ob ein Punkt ſich über oder unter einer Linie, rechts oder links von einer Ebene, innerhalb oder auſserhalb eines Umkreiſes befindet. Mein Zweck iſt, dieſe beyden Anſichten der Verhältniſſe geometriſcher Quantitäten zu vergleichen und einander zu nähern.

2. Die Weiſe, die ich dabey befolgen werde, beſteht darin: Man bezieht jede Figur, deren Eigenſchaften man ſucht, auf eine andere, deren Eigenſchaften bekannt ſind, und die man als Maaſsſtab zur

Vergleichung gebraucht; dann drückt man die Modifikationen, die ſie unterſcheiden, durch die gewöhnlichen Zeichen der Algebra aus, oder durch eigene, ferner durch ſyſtematiſche Anordnung der Buchſtaben, welche gebraucht werden, um die Punkte zu bezeichnen, welche die verſchiedenen Theile dieſer Figuren beſtimmen. Das nenne ich nun die Correlation der Figuren aufſtellen.

Sind die Figuren, deren Eigenſchaften man ſucht, zuſammengeſetzt, ſo löſt man ſie in mehrere einfache auf, und vergleicht jede von dieſen mit einer bekannten Figur, die als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt.

Um einen mehr erweiterten Begriff von meinem Gegenſtande zu geben, ſo wollen wir uns irgend ein Syſtem von Quantitäten vorſtellen, die durch beliebige Verhältniſſe mit einander verbunden ſind. Man ſieht leicht, daſs eben durch dieſe Verhältniſſe es hinreichend iſt, eine gewiſſe Anzahl dieſer Quantitäten zu kennen, um alle übrigen zu beſtimmen. Drückt man die letztern nun bloſs in Werthen der erſtern aus und bildet davon eine allgemeine Tafel, ſo wird dieſe Tafel der analytiſche Ausdruck der Verhältniſſe ſeyn, die nach der Hypotheſe unter allen Quantitäten des behandelten Syſtems beſteht.

Nun ſoll ſich dieſs Syſtem vermöge eines beliebigen Geſetzes in unmerklichen Graden verändern, doch mögen unter ſeinen Quantitäten einige beſtändig bleiben. Dieſs angenommen, ſo iſt es klar, daſs, ſo wie die Umformung des Syſtems fortſchreitet, auch die Formeln der Tafel, welche die Verhältniſſe der ver-

ſchiedenen Theile ausdrücken, analoge Veränderungen erleiden werden. Dieſe Veränderungen müſſen immer merklicher werden, ſo wie ſich das umgeformte Syſtem mehr von ſeinem Urzuſtande entfernt.

3. Anfangs wird dieſe Veränderung des, was man unendlich oder unbeſtimmt klein nennt, unmerklich ſeyn, bis der Rechner der Umwandelung oder dem Wachſen der Veränderlichen einen beſtimmten Werth gegeben hat, d. h. bis er für die Quantitäten des Urſyſtems, die als Gränzen oder erſte Werthe dienten, andere Werthe annimmt, die er nach der vorausgeſetzten Veränderung des Syſtems beſtimmt. In der That, da nichts bis dahin bey den Quantitäten, die in die Formeln der Tafel kommen, die Gröſse ihrer Veränderung beſtimmt, ſo ſteht es dem Rechner frey, ſie ſo klein, als er will, anzunehmen. Aus dieſem unbeſtimmten Zuſtande des Syſtems entſteht eine zufällige ſehr wichtige Vereinfachung, nämlich die Hierarchie der Differentien von verſchiedenen Ordnungen, aus deren Entwickelung wieder die ſogenannte Analyſis des Unendlichen, eine der fruchtbarſten der Rechnungsarten entſteht. Dieſe Analyſis iſt nichts als eine groſse und glückliche Anwendung der Methode der Unbeſtimmten.

4. Aber iſt der Rechner ſo weit gekommen, für jede Quantität des Urſyſtems eine ſolche Subſtitution zu machen, d. h. hat er in den Urformeln für die dahin gehörigen Quantitäten den Werth geſetzt, welchen jede von ihnen erhielt, als das Syſtem auf irgend einen beſtimmten Zuſtand der Umformung gekommen war, ſo kann es ſeyn, daſs dieſe Umformung noch

ſo gering iſt, daſs die Geſtalt der Tafel, welche den jedesmaligen Zuſtand des Syſtems vorſtellt, noch keine Veränderung in den Zeichen erlitten hat, welche die zu den Formeln gehörigen Quantitäten verbinden, und daſs ſie bloſs in den abſoluten Werthen dieſer halben Quantitäten geändert iſt. Ich drücke dieſen Zuſtand des umgeformten Syſtems ſo aus, daſs ich es in direkter Correlation mit dem Urſyſteme nenne.

5. Ging aber die Umformung weiter, ſo können die für das Urſyſtem gefundenen Formeln nicht mehr mit ſeinem neuen Zuſtande übereinſtimmen, ohnerachtet aller Veränderungen, die man mit den abſoluten Werthen der in dieſe Formeln gehörigen Quantitäten machen könnte. Es kann auch nöthig ſeyn, um ſie für das umgeformte Syſtem paſſend zu machen, das Zeichen einer oder mehrerer dieſer Quantitäten zu verändern. Ich drücke dieſen neuen Zuſtand des umgeformten Syſtems dadurch aus, daſs ich ſage, es ſey mit dem Urſyſtem, welches immer als Maaſsſtab zur Vergleichung dient, in indirekter Correlation.

6. Die Umformung des Syſtems kann noch weiter gehen. Es kann ſelbſt unzureichend ſeyn, wie vorher das Zeichen einer oder mehrerer der Quantitäten, die ins Syſtem gehören, zu ändern, und man kann dieſe Quantitäten ſelbſt oder einige unter ihnen mit den eingebildeten Wurzeln der Einheit multipliciren müſſen. Wir werden nämlich bald ſehen, daſs es nöthig ſeyn kann, eine Quantität mit $r-1$, die

andere mit $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ u. ſ. w. zu multipliciren. In dieſem neuen Zuſtande ſteht das Syſtem mit dem Urſyſtem in eingebildeter Correlation.

Da man aber die Einheit als den natürlichen Coefficienten jeder Quantität betrachten darf, ſo ſieht man, daſs ihre Wurzeln, als Coefficienten gebraucht, mehr wie bloſse Zeichen, als wie Quantitäten anzuſehen ſind, denn ſie verändern nichts am abſoluten Werthe dieſer Quantitäten; ſie drücken ihnen nur das Siegel der Ungereimtheit, das ſie tragen ſollen, auf, und man kann ſie durch eine einfache algebraiſche Umformung verſchwinden laſſen. So wird z. B. $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a$, wenn man ſie zum Cubus erhebt, $= a^3$, eben ſo, als wenn gar kein Coefficient da geweſen wäre. Die Einheit ſelbſt, die bey allen Quantitäten Coefficient iſt, kann in dieſer Hinſicht mehr wie ein Zeichen, als wie eine Quantität betrachtet werden. So werde ich alſo in der Folge die Einheit und alle ihre Wurzeln, als Coefficienten gebraucht, unter dem allgemeinen Namen algebraiſcher Zeichen umfaſſen, eben ſo wie + und —, was ſelbſt nichts anders iſt, als die Coefficienten + 1 und — 1.

Ich muſs im Vorbeygehen in Hinſicht auf dieſe Wurzeln bemerken, daſs das Verhältniſs zweyer unter ihnen, in demſelben Grade oder nicht in demſelben Grade genommen, ihr Produkt, die verſchiedenen Potenzen oder Wurzeln einer jeden u. ſ. w. ſich immer wieder in der unendlichen Zahl dieſer halben

Wurzeln der Einheit befinden. So ist zum Beyspiel das Produkt aus $\sqrt{-1}$, welches eine der 4ten Wurzeln der Einheit ist, in $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, welches eine der 3ten Wurzeln ist, auch eine Wurzel der zwölften Ordnung, weil, wenn man dieſs Produkt zur 12ten Potenz erhebt, nothwendig die Einheit wieder erſcheint.

7. Endlich kann die Umformung des Urſyſtems ſo weit getrieben werden, daſs die Veränderung einfacher dahin gehöriger Quantitäten nicht mehr hinreicht, d. h. daſs es unzureichend iſt, ſie mit $-1$, oder ſonſtigen Wurzeln der Einheit zu multipliciren, ſondern daſs man dieſe Zeichenveränderung nicht bey den einfachen Quantitäten, ſondern bey einigen ihrer Funktionen anbringen muſs. Dann iſt das neue Syſtem in complexer Correlation mit dem Urſyſtem.

8. Ungeachtet dieſer Veränderungen behält jede Quantität des umgeformten Syſtems, da ſie ſich nur in unmerklichen Graden verändert, ihre wirkliche Exiſtenz, und eine ihr entſprechende im Urſyſtem. Die Analogie beyder Syſteme beſteht immer, der Ausdruck der Quantitäten kann wohl in den Formeln mit Zeichen wechſeln, aber ihre Zahl und der Werth einer jeden bleiben. Dieſs ſind nun die verſchiedenen Syſteme (oder vielmehr, dieſs iſt daſſelbe Syſtem in dem verſchiedenen Zuſtande der Umformung betrachtet), welche ich correlative Syſteme nenne, indem ich durch die eben angeführten eignen Ausdrücke

drücke die mehr oder weniger entfernten Grade der Correlation bezeichne.

Es kommt alſo

1) darauf an, die analytiſche Tafel der Verhältniſſe unter den verſchiedenen Theilen des Urſyſtems zu bilden, nach gewiſſen unter ihnen beſtehenden Beziehungen;

2) eine zweyte Tafel zu bilden, welche alle Veränderungen bezeichnen ſoll, die in den Formeln der erſten Tafel aus der Umformung des Syſtems entſpringen, ſo wie es ſich von ſeinem Urzuſtande entfernt.

Dieſs iſt nun der Zweck dieſes Werkes. Der Titel zeigt, daſs ich vorzüglich dieſe letzte Tafel beabſichtige, nämlich die der Correlation der Syſteme; aber da ihre Bildung oft die vorhergehende Bildung der erſten erfordert, da man wenigſtens daraus eine groſse Hülfe in dieſer Hinſicht zieht, noch mehr, da die Methode, ſo durch eine allgemeine Tafel alle Quantitäten eines Grundſyſtems bloſs in Werthen einiger unter ihnen darzuſtellen, mir groſse Vortheile zu verſprechen ſcheint, ſo werde ich mich eben ſo viel mit der erſten, als der zweyten Tafel beſchäftigen. Im erſten Abſchnitt entwickele ich Grundſätze, die auf alle Theile der Mathematik anwendbar ſind; in den andern werde ich verſchiedene Anwendungen auf die Elementar-Geometrie und die Theorie der Curven zeigen.

## Erſter Abſchnitt.

### Allgemeine Grundſätze.

9. Ehe ich zum Werke ſelbſt gehe, muſs ich einen Unterſchied zwiſchen den Worten Werth und Quantität andeuten, der für das, was ich in der Folge zu ſagen haben werde, ſehr wichtig iſt.

Durch den Ausdruck Werth, verſtehe ich überhaupt jede Art algebraiſcher Funktion. So iſt $a$ ein abſoluter Werth; $+a$ ein poſitiver Werth; $-a$ ein negativer Werth; $r-a$ ein eingebildeter Werth. Ich behalte mir im Gegentheil das Wort Quantität vor, um einzig und allein die Sache ſelbſt, deren Eigenſchaften man ſucht, oder ihren abſoluten Werth (d. h. wenn man vom Zeichen abſtrahirt) zu bezeichnen. Nimmt man alſo dieſe Definition an, ſo giebt es keine poſitive, keine negative und keine eingebildete Quantitäten. Jede Quantität iſt ein wirklicher Gegenſtand, den der Geiſt entweder ſelbſt, oder deſſen Vorſtellung auf abſolute Art in der Rechnung er doch faſſen kann; da hingegen die Werthe oder Funktionen nichts als bloſse algebraiſche Formen, als Quantitäten mit ihren Zeichen zuſammengenommen ſeyn

können. Nun zeigen diese Zeichen Verrichtungen an, die oft nicht ausführbar sind. Z. B. $-a$ allein zeigt an, dafs man $a$ von o nehmen soll; was ungereimt ist, da es nichts unter o giebt.

Diese algebraische Formen können freylich in der Rechnung als wahre Quantitäten gebraucht werden; aber diese Rechnung giebt nur dann verständliche Resultate, wenn diese Formen auf Verbindungen zurückgeführt sind, die wirkliche Gegenstände darstellen, d. h. auf Formeln oder Funktionen, in denen die angezeigten Verrichtungen wirklich ausgeführt werden können. Man kann wohl in einer Rechnung die Subtraktion einer Quantität, die von einer kleineren abgezogen werden soll, anzeigen, aber man kann sie nicht ausführen. Doch kann dieſs ungereimte Resultat, wenn es algebraisch ausgedrückt ist, durch Umformungen zu Resultaten einer andern Gattung führen, die nur ausführbare Verrichtungen an wirklichen Quantitäten anzeigen. Nur mit dem Fall sind diese Resultate wirklich bedeutend, und können nützlich auf den Gegenstand, den man sich vorgesetzt hat, angewendet werden.

Ich nehme z. B. an, dafs der Ausdruck der Bedingungen einer Aufgabe mich auf diese Gleichung geführt hätte: $x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$, oder $(x-a)^2 = b$; so ziehe ich daraus $x - a = \pm \sqrt{b}$.

Das erste dieser Resultate, nämlich $x - a = \sqrt{b}$, giebt dem Geiste nur deutliche Vorstellungen, aber das zweyte $x - a = -\sqrt{b}$ ist unverständlich, weil das zweyte Glied eine ungereimte Quantität oder eine bloſse algebraische Form ist, die nichts Wirkliches

ausdrückt. Doch durch die bloſse Verſetzung der Quantität $a$ mache ich dieſs Reſultat bedeutend und nützlich für meinen Gegenſtand, weil es die aufgeworfene Frage eben ſo gut, als das erſte auflöſt. Denn dann wird von den beyden Reſultaten das eine $x = a + \sqrt{b}$, das andere $x = a - \sqrt{b}$, welche gleich bequem das Problem auflöſen.

10. Wenn die Eigenſchaften irgend eines Syſtems von Quantitäten durch Gleichungen oder Formeln ausgedrückt werden, die auf dieſen eben berührten Urzuſtand zurückgeführt ſind, d. h. ſo, daſs alle darin durch Zeichen angezeigte Verrichtungen wirklich ausgeführt werden können; ſo ſage ich, daſs dieſe Formeln unmittelbar anwendbar auf das Syſtem ſind, und nenne ſie, in Hinſicht auf das Syſtem, klare Formeln. Im Gegentheil nenne ich verwickelte Formeln diejenigen, die nicht auf das Syſtem angewandt werden können, wenn ſie nicht vorher eine Umformung erlitten haben.

So ſind im vorigen Beyſpiel, $x - a = \sqrt{b}$, $x = a + \sqrt{b}$, $x = a - \sqrt{b}$, klare Formeln, weil in dieſen Gleichungen keine Verrichtung angezeigt iſt, die nicht wirklich ausgeführt werden könne, hingegen die Gleichung $x - a = -\sqrt{b}$ iſt bloſs verwickelt, weil man ſie nicht bedeutend machen kann, ohne ſie vorher umgeformt zu haben; indem man z. B. entweder $a$ verſetzt, was $x = a - \sqrt{b}$ giebt, oder indem man die Zeichen aller Ausdrücke verändert, woraus $a - x = \sqrt{b}$ entſteht; Formeln, die beyde klar ſind.

11. Unter der Geſchlechtsbenennung Gröſse werde ich eben ſo wohl wahre Quantitäten, als algebraiſche Formen, die ich Werthe genannt habe, begreifen. Bisweilen auch um mich ſo viel als möglich den gewöhnlichſten Ausdrücken zu nähern, werde ich Quantität für Werth brauchen, und ſo wechſelsweiſe, aber bloſs, wenn daraus kein zweydeutiges Reſultat entſtehen kann.

12. Man hat an dem oben angeführten Beyſpiel geſehen, daſs man verwickelte Formeln nicht als unbrauchbar verwerfen muſs; es iſt ſogar gerade der Gebrauch dieſer Formeln, der den Charakter der Analyſis ausmacht, und der ihr einen ſo groſsen Vortheil vor der Syntheſis giebt. Dieſe iſt durch die Natur ihres Verfahrens eingeſchränkt; ſie kann niemals ihren Gegenſtand aus den Augen verlieren; dieſer Gegenſtand muſs ſich ſtets dem Geiſte rein und wirklich zeigen, ſo wie alle Annäherungen und Zuſammenſetzungen, die man damit vornimmt. Sie kann alſo keine verwickelte Formeln gebrauchen, nicht Schlüſſe auf ungereimten Quantitäten, auf unausführbaren Verrichtungen machen; ſie kann wohl Zeichen gebrauchen, um der Einbildungskraft und dem Gedächtniſſe zu Hülfe zu kommen; aber dieſe Zeichen ſind nie für ſie mehr, als bloſse Abkürzungen.

Die Analyſis im Gegentheil hat nicht nur alle Hülfsmittel der Syntheſis, ſondern ſie läſst auch in ihren Zuſammenſtellungen Gegenſtände zu, die nicht exiſtiren; ſie ſtellt ſie durch Sinnbilder dar, eben ſo gut wie die wirklichen; ſie miſcht Weſen der Wirklichkeit und Geſchöpfe der Vernunft, und bringt durch methodiſche

Umformungen endlich die letzten, nachdem ſie ſich ihrer zur Hülfe bedient hat, aus der Rechnung. Dann verſchwindet das Unverſtändliche aus den Formeln, und es bleibt nur das nach, was eine feine Syntheſis ohne Zweifel auch hätte entdecken können; aber man hat dieſs Reſultat auf einem kurzen und leichteren Wege, beynahe durch bloſsen Mechanismus erhalten, da im Gegentheil, zu jeder andern Art dahin zu gelangen, groſser Kraftaufwand nöthig geweſen wäre. Dieſs iſt der Vorzug der Analyſis vor der Syntheſis, d. h. der Neueren vor den Alten.

Die Alten brauchten die Zeichen, welche die Neueren auf allgemeinere Art in der Analyſis anwenden, nicht einmal als Abkürzungen in ihrer Syntheſis. Aber dieſs beweiſt nicht, daſs der Gebrauch der Zeichen ausſchlieſslich für die Analyſis gehöre; dieſs beweiſt bloſs, daſs die Alten, um die bewundernswürdigen Entdeckungen zu machen, die wir ihnen verdanken, nicht einmal die Hülfe einer ſo weit als möglich getriebenen Syntheſis hatten. Doch gebrauchten ſie die Lehre von den Verhältniſſen ſehr geſchickt, wo man eine Art von Mechanismus anwendet, der mit dem analytiſchen viele Aehnlichkeit hat, aber ſie gebrauchten ſie nur, um ausführbare Verrichtungen anzuzeigen. Die Neueren haben den Weg eröffnet, und hierdurch wird der Charakter der Analyſis beſtimmt und ihr überraſchendes Reſultat hervorgebracht.

13. Jeder andere Unterſchied zwiſchen Analyſis und Syntheſis iſt nur ſcheinbar. Die Syntheſis, ſagt man, iſt die Kunſt, ſich ſtufenweiſe von den einfach-

ſten Wahrheiten durch ihre ſucceſſive Annäherung und Zuſammenſtellung zu den zuſammengeſetzteſten zu erheben; wenn die Analyſis die Kunſt iſt, eine verwickelte Wahrheit in ihre erſten Beſtandtheile aufzulöſen, d. h. die Kunſt, allmählich ſich nähernd zu bewähren, ob eine Wahrheit oder ein entfernter Satz, den man als wahr annimmt, mit dieſen Grundſätzen oder Axiomen übereinſtimmt und eine nothwendige Folge aus ihnen iſt. Aber es iſt klar, daſs die Schlüſſe, die man in beyden Fällen machen muſs, dieſelben ſind, nur in einer anderen Ordnung. Dieſs iſt alſo kein weſentlicher Unterſchied der beyden Methoden, und man ſieht ſo nicht ein, was der einen einen ſo groſsen Vortheil vor der andern giebt.

Die algebraiſchen Charaktere oder Zeichen, welche der Analyſis ſo geläufig ſind, während die Syntheſis faſt immer die gewöhnliche Sprache braucht, bilden durch ſich ſelbſt, wie man geſehen hat, keinen bedeutenderen Unterſchied; denn in der Syntheſis braucht man dieſe Zeichen oft als bloſse Abkürzungen, und macht deswegen doch aus ihr keine Analyſis. Eben ſo wird eine analytiſche Formel, in gewöhnliche Sprache überſetzt, deswegen kein ſynthetiſcher Satz. Es iſt gewiſs, daſs man einen ausgedehnten Gebrauch der algebraiſchen Zeichen machen kann, ohne ſich je aus der Syntheſis zu entfernen, und daſs es keine analytiſche Unterſuchung giebt, zu der man nicht gelangen könne, ohne ein einziges dieſer Zeichen zu gebrauchen; man braucht nur diſen Zeichen eine hinreichende Anzahl Worte unterzuſchieben.

Es ist wahr, dass die Synthesis von Axiomen ausgeht und sich stufenweise zu verwickelteren Wahrheiten erhebt. Aber dieses Verfahren ist ihr nicht eigen, dieses ist das einzig mögliche in allen Fällen, und schon bey wenigem Nachdenken wird man sehen, dass die Analysis kein anderes beobachtet. Sie behandelt freylich unbekannte Grösen als gegebene, aber diese unbekannten Grösen haben bekannte Eigenschaften, woran sich einzig die Analysis hält; diese übersetzt sie, und aus diesen, indem sie immer, wie die Synthesis, vom Bekannten zum Unbekannten geht, entwickelt sie das, was sie entdecken will. Die Kunst, von dem, was man nicht weiss, zu dem, was man weiss, zu schreiten, ist eine Verrichtung, die dem menschlichen Verstande versagt ist.

Von jeher haben die Menschen ihre intellektuellen Fähigkeiten durch Symbole zu unterstützen gesucht, um sich so eine Art von künstlichem Gedächtnisse zu verschaffen, ihre Einbildungskraft durch die Näherung der Gegenstände, von denen sie getroffen war, zu erweitern, und die Gesetze der Schlussfolge auf eine Art von Mechanismus zu bringen. Diese Grundidee oder dieser Instinkt ist die Quelle der grösten Entdeckungen aller Art gewesen; vorzüglich die Quelle der genauen Wissenschaften, z. B. der Rechenkunst, d. h. der Kunst durch materielle Verrichtungen an einem System symbolischer Charaktere theilweise die Verrichtungen des Geistes zu ersetzen; der Algebra, die nur eine Art unbestimmter Rechenkunst, d. h. die Kunst ist, der Zahlen-Rechenkunst die Verrichtungen anzuzeigen, die sie ausführen soll. Die eine wie die

andere ſind Werkzeuge, deren ſich die Analyſis bedient; aber dieſe Werkzeuge gehören eben ſo wohl der Syntheſis; bloſs der verſchiedene Gebrauch, den die beyden Methoden von ihnen machen, beſtimmt ſie. Durch ſie drückt die Syntheſis alle möglichen Verhältniſſe des Daſeyns unter Quantitäten aus; aber vermittelſt ihrer iſt die Analyſis dahin gelangt, nicht bloſs alle Verhältniſſe des Daſeyns auszudrücken, ſondern auch alle unvereinbare Verhältniſſe: dieſs, indem ſie die erſten durch die Anzeigung möglicher Verrichtungen darſtellt; die andern durch Anzeigung unausführbarer Verrichtungen.

Man bilde eine ununterbrochene Kette von Sätzen, vom Axiom bis auf eine entfernte Wahrheit, ſo wird es leicht ſeyn, auf mehrere Arten die Ordnung dieſer Sätze zu verkehren, ohne daſs die Reihe der Schlüſſe etwas von ihrer Evidenz verliere; denn die einzigen hier zu erfüllenden Bedingungen ſind,

1) daſs man in jedem dieſer Sätze deutlich die Gleichheit der beyden verglichenen Gegenſtände ſehe;
2) daſs dieſe beyden Gegenſtände wiederholt ſeyen, der eine im vorhergehenden, der andere im folgenden Satze.

Nun iſt es deutlich, daſs es viele Arten geben kann, dieſe Bedingungen zu erfüllen, und daſs folglich die Veränderung der Ordnung in der Reihe dieſer Sätze nicht die Veränderung der Methode ausmacht.

Was wirklich die Veränderung ausmacht, d. h. den Unterſchied der Analyſis von der Syntheſis, iſt dieſs, daſs die letztere nie zu dem geſuchten Reſultat

gelangt, wenn ſie nicht vorher in der That die Kette von Sätzen, von der wir eben ſprachen, aufſtellt; die Analyſis im Gegentheil aber gleich durch einen ihr eignen kurzen Weg dahin kommt, indem ſie unterwegs eine Kette, nicht von wirklichen Gegenſtänden, wie die vorige, ſondern von Hieroglyphen bildet, die ſehr oft nur bloſse Vernunftweſen bedeuten. Hat ſie die geſuchte Wahrheit einmal gefaſst, und der Syntheſis gezeigt, ſo iſt das Amt der letzteren, ihre Kette von wirklichen Gegenſtänden aufzuſtellen: die groſse Schwierigkeit iſt gehoben; man weiſs den Punkt, wo man ankommen ſoll; der Punkt, wo man ausgeht, iſt bekannt, und man braucht nur den kürzeſten und bequemſten Weg zu bezeichnen, um den Zwiſchenraum auszufüllen.

Iſt dieſer Weg einmal gegründet, ſo iſt er gleich ſicher und gleich lichtvoll, man mag ihn in welcher Richtung man will durchlaufen; es iſt immer Syntheſis, ſo wie der hieroglyphiſche Weg immer Analyſis bleibt, ſo lange die durch dieſe Bilder bezeichneten Gegenſtände nicht wirkliche und dem Geiſte faſsliche geworden ſind. So wie ſie das werden, ſind die Hieroglyphen nichts mehr als eine abgekürzte Schrift, die kein weſentlich verſchiedenes Merkmahl von der Schrift der Syntheſis beybehält; die eine wird zur andern durch eine bloſse Ueberſetzung.

Wäre eine abgekürzte Schrift genug, um Analyſis zu begründen, ſo hätte die Stenographie dieſen Charakter; ſie würde Analyſis ſeyn, auf den gewöhnlichen Gebrauch der Geſellſchaft angewandt. Aber ſie erreicht dieſen Zweck nicht; ihre Vortheile ſind,

Worte mit der Schnelle des Organs, das ſie ausſpricht, aufzufaſſen, von ihnen ein Bild zu entwerfen, das ſie unter einen Geſichtspunkt körperlich nähert und vereinigt, und endlich eine Wirkung hervorzubringen, die ſich ſehr der der algebraiſchen Zeichen nähert, die wie bloſse Abkürzungen gebraucht werden. Aber um die Stenographie zu einer analytiſchen Wiſſenſchaft zu erheben, müſste man ihr einen Mechanismns anpaſſen können, der geſchickt wäre, auf alle möglichen Arten die Rede, die ſie darſtellt, umzuformen, ohne ihren Sinn zu verändern, die Theile dieſer Rede zu verſetzen, ohne ihre Beziehung oder doch wenigſtens die Reſultate ihrer Zuſammenſtellung zu ändern; dann könnten die Regeln dieſes Mechanismus eine Art Analyſis bilden, die auf Gegenſtände jeder Art anwendbar wäre.

14. Die glücklichen Fortſchritte der Analyſis, die ſtete Uebereinſtimmung ihrer Reſultate mit dem, was man durch die Syntheſis erhalten konnte, und das Siegel der Gewiſsheit, das allen Entdeckungen der erſtern nach der Reihe von der letztern aufgedrückt ward, haben die Sicherheit ihres Verfahrens auſser allen Zweifel geſetzt. Aber bey den erſten Verſuchen dieſer Erfindungsmethode muſste man ſehr vorſichtig ſeyn, und durfte ihre Entdeckungen nicht an's Licht bringen, wenn ſie nicht vorher durch die Probe der Syntheſis gegangen waren. Deswegen, glaube ich, hielt Newton ſeine erhabenen Arbeiten nicht werth vor den Augen der gelehrten Welt zu erſcheinen, ehe er ihnen die ſynthetiſche Form gegeben und ſie von den ſymboliſchen Ausdrücken befreyt hatte, die ab-

ſurde Quantitäten oder unausführbare Verrichtungen angezeigt hätten; Hülfsmittel, die dem Suchenden unendlich nützlich ſind, die aber doch den nicht ganz befriedigen, der nicht das kleinſte Wölkchen leiden kann. Er wollte in einem Werke, daſs, wenn man die Kette der hieroglyphiſchen Wahrheiten aufgeſtellt hätte, man auch die Kette der erkennbaren Wahrheiten wieder anknüpfte. Durch glücklichen Erfolg iſt man dreiſter geworden, und den Reſultaten der Analyſis traut man jetzt eben ſo viel, als dem, was man durch die ſtrengſte Syntheſis erlangt.

Wenn die Analyſis nur die Kunſt wäre, der Kette der Schlüſſe in einer Richtung zu folgen, die der Richtung, auf die die Syntheſis zeigt, entgegengeſetzt wäre, ſo könnten die Neueren ſich nicht ihre Erfindung zuſchreiben; denn dieſer Gang war den Alten ſchon bekannt, von ihnen gebraucht und nach den Regeln erklärt. Sie ſchrieben Plato'n die Entdeckung zu, und die *reductio ad abſurdum*, die ſie oft in ihren Beweiſen gebrauchten, ward als eine Anwendung dieſer Methode angeſehen. Newton's *Principia* enthalten eine Menge Unterſuchungen, die auf demſelben Wege angeſtellt worden ſind. Und doch führt man mit Grund dieſs Werk als ein Meiſterſtück der Syntheſis an, weil es in der That ihren wahren Charakter hat; weil die algebraiſchen Zeichen darin nur als Abkürzungen gebraucht ſind, und man nirgends darin auf iſolirte negative oder eingebildete Quantitäten ſtöſst *). Nun iſt es der Gebrauch dieſer

*) In dem ganzen Werke der *Principia* habe ich keine eingebildete Quantität bemerkt; man trifft auf 4 bis 5 von nega-

algebraiſchen Formen, der wahrhaftig die analytiſche Methode ausmacht; zwiſchen den Symbolen, die wirkliche Gegenſtände darſtellen, und denen, die bloſse Weſen der Vernunft ausdrücken, liegt der Uebergang der Syntheſis zur Analyſis, liegt die zwiſchen ihnen gezogene Demarkationslinie. Hier wechſelt man den Führer, hier verliert die Einbildungskraft ihren Gegenſtand aus den Augen, um ihn nicht eher wieder zu finden, als am Ende der Kette, wo die beyden Methoden von neuem ſich vereinigen und in ihren Reſultaten zuſammentreffen.

15. Die Syntheſis wird nicht ausſchlieſslich auf Mathematik angewandt. Sie iſt überhaupt die Kunſt mit Richtigkeit zu ſchlieſsen, was auch immer der Gegenſtand der Schluſsfolge ſey. Sie iſt nicht von der Dialektik unterſchieden; die eine wie die andere iſt die Methode, die Form eines Schluſſes zu verändern, ohne den Schluſs ſelbſt zu ändern; man mag nun ſeine Theile umſetzen, oder einem deutlichen Ausdruck dieſes Schluſſes einen andern unterſchieben, der eben ſo viel ſagt. Dieſe Reihe von Umformungen, ſtrenge auf die Schluſsfolge im Allgemeinen angewandt, mag ſie durch Zeichen oder durch gewöhnliche Sprache ausgedrückt ſeyn, nennt man Syntheſis oder Dialektik. Die Analyſis allgemein genommen iſt dadurch unterſchieden, daſs die Reihe der Umformungen mit Theilen der Unterſuchung vorgenommen wird, die allein genommen verſtümmelt und nie ver-

---

tiver Form die zur Vereinfachung der Rechnung genommen ſind.

A. d. V.

ſtändlich ſind, aber wenn ſie wie die andern dem Mechanismus der Schluſsfolge unterworfen werden, durch eine neue Reihe von Umformungen zu deutlichen und genauen Reſultaten, wie die der Syntheſis, führen können. Ich glaube nicht, daſs es unmöglich ſey, dieſen analytiſchen Mechanismus auf Gegenſtände anzuwenden, die man als ganz fremdartig mit denen von der Mathematik behandelten betrachtet, aber dieſe Anwendung muſs um ſo viel ſchwerer werden, als die Verhältniſſe zwiſchen dieſen Gegenſtänden weniger einer beſtimmten Schätzung und einer genauen Stufenleiter der Vergleichung fähig ſind. Da nun der gröſste Theil der Fragen, die nicht allein im Verkehr der Geſellſchaft abgehandelt werden, ſondern auch in wiſſenſchaftlichen Werken, die mehr für die Schärfe der Schluſsfolge gemacht zu ſeyn ſcheinen (z. B. in der Staatshaushaltung), zum Theil mit der Moral mit Muthmaſsungen unbeſtimmter Thatſachen und ſehr vervielfältigten Zuſätzen verknüpft ſind; ſo giebt es wenige Umſtände, wo die eigentliche analytiſche Wiſſenſchaft ihre Anwendung finde. Doch zweifle ich gar nicht, daſs man nicht dahin gelange, ihr Gebiet weit auszudehnen, wenn man die Regeln des Mechanismus aufſucht, den man auf gemeine Erörterungen und vorzüglich auf die ſtenographiſche Schrift anwenden könne.

16. Dieſe Abſchweifung, wenn vielleicht auch zu weit ausgedehnt, iſt doch dem Gegenſtande, den ich abhandle, nicht fremd. Denn man muſs ſich gerade bemühen, den Gebrauch zu rechtfertigen, den die Analyſis von Quantitäten macht, die in ſich ſelbſt

absurd sind, und darthun, wie diese absurden Quantitäten andere anzeigen, die wirklich sind, und wie die Zeichen, die auf sie wirken, die verschiedenen Verhältnisse und die jedesmaligen Lagen erkennen lassen, die sie haben müssen. Dieſs Werk ist ein Versuch in Untersuchungen dieser Art.

17. Im Allgemeinen macht der Gebrauch der sogenannten negativen Quantitäten allein genommen, dafs eine angezeigte Verrichtung nicht ausführbar ist, d. h. der Quantitäten, die von Null abgezogen werden sollen oder kleiner als Null sind. Wir haben also, eigentlich zu sprechen, eine Prüfung der Natur der Gröſsen anzustellen, die negativ oder positiv genannt werden.

18. Wir wollen ein System von veränderlichen Quantitäten annehmen, einerley, ob aus der Geometrie gezogen oder nicht, und dieſs System in zwey verschiedenen Zuständen betrachten; in einem, den ich als Maafsstab zur Vergleichung annehme und Ursystem nenne; und in einem andern, den ich auf den ersten beziehe und den ich umgeformtes oder correlatives System nenne.

19. Nun wollen wir jede der Quantitäten, die das Ursystem ausmachen, als die Gränze der ihr im umgeformten System entsprechenden betrachten, d. h. als ihren ersten Werth, wenn das System von seinem Urzustand zu seinem umgeformten überzugehen anfängt, oder, wenn man will, als ihren letzten Werth, wenn man annimmt, dafs das umgeformte System auf seinen Urzustand zurückkommt. Hier ist es deutlich, dafs, wenn man zwey der Quantitäten des umgeformten Systems unter einander vergleicht, um ihr

Verhältnifs zu kennen, diefs Verhältnifs, als Gränze oder als erfter und letzter Werth, das Verhältnifs der Gränzen derfelben Quantitäten haben werde, und gerade diefs Verhältnifs der Gränzen oder der Gränze des Verhältniffes zweyer Quantitäten des umgeformten Syftems, nennt man erftes oder letztes Verhältnifs derfelben Quantitäten.

Ift der Zuftand der Umformung des Syftems noch nicht beftimmt, und nimmt man den Unterfchied jeder Quantität von ihrer Gränze, fo find diefe Unterfchiede das, was man unter dem Namen der unendlich kleinen bezeichnet; d. h. man nennt unendlich klein den Unterfchied einer unbeftimmten Quantität von ihrer Gränze, weil man wirklich zu gleicher Zeit diefe Unterfchiede fo klein machen kann, als man will, indem man das umgeformte Syftem, fo viel man will, dem Urfyftem nähern und zugleich alle diefe Quantitäten verfchwinden laffen kann, indem man die Annäherung der beyden Syfteme fo weit treibt, bis fie in einander fallen.

Man fieht alfo, dafs die Gränze von jeder diefer Quantitäten, die unendlich klein genannt werden, Null ift. So kann man fie alfo beftimmen, indem man fagt, man nennt unendlich klein jede Quantität, die Null zur Gränze hat. Diefe Definition ift ftreng genau. Eine unendlich kleine Quantität ift darum nicht keine Quantität, fondern eine Quantität, deren Gränze Null ift, und diefer einfache Begriff verbannt alle Schwierigkeiten aus den Anfangsgründen der Analyfis des Unendlichen. Wir haben oben gefagt, dafs das letzte Verhältnifs zweyer veränderlichen Quantitäten

nichts

nichts anders ist, als das Verhältniss ihrer Gränzen. Dieſs sieht man vollkommen ein, so lange diese Gränzen nicht Null sind, d. h. so lange diese verglichenen veränderlichen Quantitäten nicht die sind, die man unendlich klein nennt. In diesem letzten Fall, da das Verhältniſs der Gränzen auf $\frac{0}{0}$ zurückkommt, nimmt das letzte Verhältniss dieſer Quantitäten, wie man sieht, eine unbestimmte Gestalt an. Welches ist nun der Werth dieſer Unbestimmten? Hier liegt der Grund der Schwierigkeit der Analyſis des Unendlichen. Aber diese Schwierigkeit hört sogleich auf, wenn man betrachtet, daſs diesem letzten Verhältniſs, da es nichts anders ist, als das Ziel, dem sich mehr und mehr das Verhältniss dieſer Quantitäten selbst nähert, so wie das umgeformte Syſtem dem Punkte, wo es in das Urſyſtem fällt, näher kommt, daſs diesem Verhältnisse selbst sein Werth durch das Gesetz der Stetigkeit bestimmt ist, und daſs es so aus dem Zustande der Unbestimmtheit kommt.

20. Wenn in einer streng genauen Gleichung unendlich kleine Quantitäten sich mit andern vermischt finden, die es nicht sind, und man diese Gleichung auf 2 Ausdrücke bringen kann, deren Verhältniſs selbst eine unendlich kleine Quantität ist, so beweist die Methode der Unbestimmten, daſs jeder dieſer Ausdrücke für sich nothwendig $= 0$ ist. Denn wenn man annimmt, daſs $X + Y = 0$ diese genaue Gleichung, und daſs $\frac{Y}{X}$ eine unendlich kleine Quantität sey, so behaupte ich, daſs nothwendig $X$ und $Y$

jedes für ſich genommen $= o$ ſeyn müſſen. Wir wollen annehmen, $X$ ſey nicht o, ſo theile ich alles durch $X$ und erhalte $1 + \frac{Y}{X} = o$; aber nach der Hypotheſe iſt $\frac{Y}{X}$ eine unendlich kleine Gröſse; d. h. indem man das umgeformte Syſtem dem Urſyſteme nähert, kann man $\frac{Y}{X}$ ſo klein machen als man will; alſo wenn $X$ nicht o iſt, ſo kann man machen, daſs 1 ſo wenig, als man will, von o unterſchieden ſey, was abſurd iſt. Alſo hat man wirklich $X = o$, eine Gleichung, die, von der nach der Hypotheſe eben ſo genauen Gleichung $X + Y = o$ abgezogen, $Y = o$ giebt. Alſo ſind $X$ und $Y$ jede allein $= o$, und da $Y$ auch nach der Hypotheſe die Vereinigung aller Ausdrücke iſt, deren Verhältniſs zu $X$ als unendlich klein angenommen iſt, ſo folgt, daſs man alle dieſe Ausdrücke übergehen kann, um bloſs die Gleichung $X = o$ ſtehen zu laſſen. Dieſs iſt der Grundſatz der Analyſis des Unendlichen, die, wie man ſieht, nur eine Anwendung der Methode der Unbeſtimmten iſt.

Da ich den Veränderungen des umgeformten Syſtems folgen wollte, von dem Augenblick, wo es ſich von dem Urſyſteme losreiſst, muſste ich auch einen Blick auf den Zuſtand der Unbeſtimmtheit werfen, in welchem es bleibt, bis ſeine erſten Gränzen von dem Rechner verändert ſind; d. h. bis er ihm irgend einen andern beſtimmten Zuſtand angewieſen hat. Zur gehörigen Entwickelung der vorigen Be-

griffe würde freylich mehr Raum gehören. In einem andern Werke, das unter dem Titel:

*Réflexions ſur la métaphyſique du calcul infinitéſimal*,

gedruckt iſt, habe ich es zu thun verſucht, das man alſo als einen Theil dieſes Werkes anſehen kann. Ich nehme jetzt den Faden bey (18) wieder auf.

21. Statt, wie ich eben gethan habe, den Unterſchied jeder der Quantitäten des umgeformten Syſtems von ſeiner Gränze zu betrachten, betrachte ich jetzt die Differenz von irgend zwey Quantitäten des umgeformten Syſtems von einander, und vergleiche ſie mit der Differenz der dieſen Quantitäten entſprechenden Gränzen. Dieſs angenommen:

Wird der Unterſchied von irgend zwey Quantitäten des umgeformten Syſtems in direktem Sinn oder bloſs direkt genannt werden, wenn, indem man dieſe beyden Quantitäten mit den ihnen im Urſyſtem entſprechenden vergleicht, die, die im umgeformten Syſtem die gröſste iſt, während der ganzen Veränderung derjenigen, die im Urſyſtem die gröſste war, entſpricht, und eben ſo die kleinſte des einen, der kleinſten des andern, ohne daſs eine von beyden aufgehört hätte endlich zu ſeyn, d. h. nicht durch o und $\frac{1}{0}$, oder $\infty$ gegangen iſt.

Wenn hingegen die, die im Urſyſtem die gröſste war, im umgeformten die kleinſte geworden iſt, und umgekehrt, während daſs dieſe beyden veränderlichen Quantitäten beyde beſtändig endlich geblieben, d. h. weder durch o, noch durch $\infty$ gegangen ſind, ſo

wird ihr Unterſchied in inverſem Sinn oder ſchlechtweg invers genannt werden.

In Hinſicht der Quantitäten ſelbſt, deren Unterſchied in direktem Sinne angenommen wird, ſagt man, daſs ſie gegenſeitig in direkter Ordnung geblieben ſind; und wird dieſer Unterſchied invers, oder findet ſich in inverſem Sinne, ſo ſagt man, daſs ſie zur inverſen Ordnung übergegangen ſind. So nennt man alſo direkt die Unterſchiede der Gröſsen, die beſtändig in Rückſicht auf einander, während der Veränderung des Syſtemes, in direkter Ordnung bleiben, und invers die Unterſchiede derer, die zur inverſen Ordnung, in Rückſicht auf einander, durch eben dieſe Veränderung übergehen, doch ohne daſs weder die eine, noch die andere aufgehört hätte endlich zu ſeyn, d. h. ohne daſs ſie durch o oder ∞ gegangen ſey.

Aber man muſs nicht vergeſſen, daſs, nach den vorher gegebenen Begriffen, in dieſen Definitionen nur von wahren Quantitäten die Rede iſt, und nicht von dem, was ich Werth genannt habe. So können die Differenzen, die hier vorkommen, nur von dem Ueberſchuſs derjenigen Gröſse verſtanden werden, die an ſich die gröſsere iſt über diejenige, die an ſich die kleinere iſt, wobey man ganz von den Zeiten abſtrahirt, und folglich ſind dieſe Unterſchiede ſelbſt wahre Quantitäten.

22. Man nehme z. B. einen Triangel $ABC$, auf deſſen Grundlinie $\overline{BC}$ aus dem entgegengeſetzten Winkel $A$ ein Perpendikel $\overline{AD}$ geſenkt ſey, von dem ich annehme, daſs er zwiſchen $B$ und $C$ fällt; wir wol-

len die Grundlinie $\overline{BC}$ mit ihren beyden Abſchnitten $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ betrachten, und annehmen, daſs der Punkt $C$ ſich gegen $B$ bewegt, bis er durch den Punkt $D$ gegangen iſt. So iſt die Grundlinie und der Abſchnitt $\overline{CD}$ alſo veränderlich, während der andere Abſchnitt $\overline{BD}$ beſtändig iſt.

Iſt dieſs angenommen, ſo wollen wir als Maaſsſtab zur Vergleichung die Urfigur nehmen, die aus dem Triangel $ABC$ und dem Perpendikel $\overline{AD}$ beſteht, und als umgeformtes Syſtem dieſelbe Figur, nachdem der Punkt $C$ ſich dem Punkte $D$ genähert hat, ohne doch bis zu ihm gelangt zu ſeyn. Dann iſt es deutlich, daſs man hier im Urſyſteme wie im umgeformten beſtändig $\overline{BC} > \overline{BD}$ haben wird, und noch mehr, daſs dieſe Quantitäten während der ganzen Veränderung endlich geblieben ſind, alſo ſind es von denen, die ich in direkter Ordnung genannt habe, und ihr Unterſchied $\overline{CD}$ iſt in direkter Richtung oder direkt.

Nachher wollen wir als umgeformtes Syſtem dieſelbe Figur nehmen, wenn der Punkt $C$ ſchon jenſeits des Punktes $D$ gegangen iſt, indem uns das Urſyſtem immer als Maaſsſtab zur Vergleichung dient. Es iſt deutlich, daſs man dann $\overline{BD} > \overline{BC}$ haben wird. Alſo nach den vorher gegebenen Begriffen ſind dieſe beyden Quantitäten zur inverſen Ordnung übergegangen, und ihr Unterſchied $\overline{CD}$ iſt invers oder in inverſer Richtung, d. h. in verkehrter Richtung von dem, was ſie in der Urfigur waren, die noch immer als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen wird.

Wenn man alſo von zwey Quantitäten ſagt, daſs ſie in direkter oder inverſer Ordnung ſind, oder von einer Quantität, daſs ſie direkt oder invers iſt; ſo vergleicht man eben dadurch, zum wenigſten ſtillſchweigend, das Syſtem, zu dem dieſe Quantitäten gehören, mit einem andern Syſtem, das als Maaſsſtab zur Vergleichung, oder als Urſyſtem angenommen iſt, ohne daſs es nöthig ſey, dieſs ausdrücklich zu ſagen.

23. Den erſten Begriffen gemäſs, die ſchon (2 u. f.) gegeben ſind, nenne ich correlative Syſteme alle die, die man auf daſſelbe Urſyſtem beziehen kann, d. h. die man als verſchiedene Zuſtände eines und deſſelben veränderlichen Syſtems anſehen darf, das ſich durch unmerkbare Stufen umformt.

Zwey Syſteme, um correlativ zu ſeyn, brauchen nicht nothwendig faktiſch unter einander verbunden zu ſeyn, d. h. nicht wirklich die verſchiedenen Umformungen eines Urſyſtems zu ſeyn: es iſt genug, wenn ſie nur als ſolche betrachtet werden oder eins auf das andere durch eine Veränderung zurückgeführt werden können, die man ſich, als durch unmerkbare Stufen wirkend, vorſtellen muſs. Die Quantitäten, die ſich in den zwey correlativen Syſtemen entſprechen, werden eben ſo correlative Quantitäten genannt.

Sind zwey correlative Syſteme, ſo daſs man genau auf ſie dieſelbe Betrachtung anwenden kann, oder eine Reihe von Betrachtungen, die durchaus ähnlich ſind, ſo ſage ich in Hinſicht auf dieſelbe Reihe von Betrachtungen, daſs ſie in direkter Correlation ſtehen, oder direkt correlativ ſind. Dar-

aus folgt augenscheinlich, wenn das Resultat dieser Betrachtungen für das eine System eine gewisse Formel ist, die man unmittelbar darauf anwenden kann, dass dieselbe Formel auch auf das andere System unmittelbar anwendbar seyn wird, d. h. dass, um auf dieses die für das erste gefundene Formel anzuwenden, man keine andere Veränderung zu machen habe, als statt der darin befindlichen Werthe die entsprechenden Werthe des andern Systems zu setzen, ohne irgend eine Veränderung der Zeichen in der Formel, was dem schon gegebenen Begriffe entspricht (4). Aber wenn die Betrachtungen, die man über die beyden verglichenen Systeme machen muss, nicht mehr buchstäblich dieselben sind, so sage ich, dass sie unter sich in indirekter eingebildeter oder complexer Correlation sind, nach den mehr oder minder sichtbaren Modifikationen, die man mit den Zeichen der Formeln, welche die Eigenschaften des Ursystems ausdrücken, vornehmen muss, um sie auf das umgeformte System anwendbar zu machen.

Z. B. in dem schon betrachteten Ursystem (*Fig.* 1.) $ABCD$ kann ich diese Betrachtung anstellen. Der Triangel $ABD$ giebt

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$$

und der Triangel $ACD$

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$$

Ziehet man diese Gleichung von der ersten ab, so bleibt

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2$$

Noch mehr, man hat

$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$$

ſetzt man dieſen Werth von $\overline{BD}$ in die vorige Gleichung, ſo erhält man

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CD}$$

Es iſt deutlich, daſs dieſe Betrachtung ganz und wörtlich auf das umgeformte Syſtem anwendbar iſt, ſo lange der Punkt $D$ zwiſchen $B$ und $C$ liegt, alſo iſt die vorhergehende Formel unmittelbar auf alle Fälle anwendbar, ſo lange $CD$ in direkter Richtung iſt.

Aber iſt $C$ durch den Punkt $D$ gegangen, ſo findet bloſs der erſte Theil der Betrachtung (bis an die Worte „noch mehr") ſtatt. Der zweyte kann im Gegentheil nicht auf den neuen Fall angewandt werden, weil man nicht mehr wie vorher $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD}$ hat; ſondern im Gegentheil $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC}$, d. h. weil $\overline{CD}$ invers geworden iſt. Auch wird die Endgleichung für dieſen Fall ſeyn

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD},$$

die von der für den erſten Fall gefundenen durch das Zeichen verſchieden iſt, das den letzten Ausdruck afficirt, indem es — für den erſten Fall, und + für den zweyten iſt.

24. Wir wollen ſehen, was im Allgemeinen ſtatt findet, ſowohl wenn in den Formeln, die die Eigenſchaften des Syſtems ausdrücken, indirekte Quantitäten kommen, als auch wenn die Veränderung des Syſtems die Einführung einer, oder zweyer inverſer Quantitäten erfordert, damit ſie ihm immer unmittelbar anwendbar ſeyen.

$M$, $N$, ſeyen irgend zwey Quantitäten des Urſyſtems; $m$, $n$, die entſprechenden Quantitäten des zwey-

ten Syſtems. Dieſs angenommen, ſo werden nach der Definition, ſo lange die beyden Syſteme direkt correlativ bleiben, $m$ und $n$ genau im zweyten Syſtem dieſelbe Rolle ſpielen, wie die ihnen entſprechenden $M$, $N$, im erſten.

Noch mehr, wenn man z. B. $M \geqq N$ annimmt und auch $m \geqq n$ hat, ſo werden die letztern Quantitäten in direkter Ordnung ſeyn und ihr Unterſchied $m - n$ in direkter Richtung, d. h. wenn man den Unterſchied der beyden erſten $M$, $N$, $= P$ nennt, und $p$ den Unterſchied der beyden letzten $m$, $n$, ſo wird dieſe Quantität $p$ eine direkte Quantität ſeyn.

Nun weil $M \geqq N$ werden wir haben

$$P = M - N, \text{ und } p = m - n$$

oder $M = N + P$, und $m = n + p$

Wir wollen in die Formeln, von denen wir eben ſprachen, dieſe jedesmaligen Werthe von $M$ und $m$ ſetzen, ſo iſt es deutlich, daſs dieſe Formeln, die vor der Umformung ähnlich waren, es auch hernach ſeyn werden, weil anſtatt der ſich entſprechenden Quantitäten $M$, $m$, die dieſelbe Rolle darin ſpielten, man darin die Werthe $N + P$, $n + p$, ſubſtituirt hat, die noch dieſelben Formen haben.

Alſo, ſo lange nur in der Rechnung direkte Quantitäten vorkommen, werden die ſich entſprechenden Formeln im Urſyſtem und im umgeformten unter ſich ähnlich bleiben, weil wirklich die neuen Betrachtungen, die man zu den erſten hinzugefügt hat, d. h. zu denen, durch die die Formeln gefunden wurden, noch genau dieſelben von beyden Seiten geweſen ſind.

Jetzt wollen wir ſehen, was eintritt, wenn in die Formel eine inverſe Quantität gebracht werden muſs.

Angenommen, daſs wir noch immer $M > N$, aber im Gegentheil $n > m$ haben, d. h. daſs dieſe letzten in Hinſicht auf die erſten in inverſer Ordnung ſind, ſo wird ihr Unterſchied nicht mehr wie vorher $m - n$, ſondern $n - m$ ſeyn, und man wird für dieſen Fall auf einer Seite $P = M - N$ und auf der andern $p = n - m$ oder $M = N + P$, und $m = n - p$ haben.

Wir wollen dieſe Werthe von $M$ und $m$ in die ſich entſprechenden Formeln ſetzen, die bis dahin für beyde Syſteme ähnlich waren, ſo werden ſie aufhören es nach dieſer Subſtitution zu ſeyn: denn in die eine hat man $N + P$ ſtatt $M$ geſetzt, in die andere $n - p$ ſtatt $m$; es wird alſo zwiſchen den neuen Formeln der Unterſchied ſeyn, daſs die Werthe der Quantitäten $P$ und $p$ von verſchiedenen Zeichen afficirt ſind. Um alſo von den Formeln des Urſyſtems zu denen des umgeformten Syſtems überzugehen, iſt es genug, wie vorher, in den erſten für die darin befindlichen abſoluten Werthe, die abſoluten ihnen entſprechenden Werthe des andern Syſtems zu ſetzen, und aufserdem noch das Zeichen der Quantität $p$ zu ändern, die invers geworden iſt.

Da man nun dieſelbe Betrachtung auf alle andere Quantitäten, die gleichfalls invers geworden ſind, anwenden kann, ſo iſt es deutlich, daſs man auch dieſen allgemeinen Grundſatz aufſtellen kann.

25. Um die Formeln irgend eines Syſtems von Quantitäten auf ein anderes

Syſtem anwendbar zu machen," das ihm indirekt correlativ iſt, muſs man

1) die Correlation der abſoluten Werthe feſtſetzen, indem man für jeden derſelben, der zum Urſyſtem gehört, das als Mittel der Vergleichung angenommen wird, den abſoluten Werth, der ihm im andern Syſteme entſpricht, ſetzt;
2) die Correlation der Zeichen aufſtellen, indem man in den Formeln das Zeichen jeder Quantität, die ſich in inverſer Richtung im zweyten Syſtem findet, verändert, und im Gegentheil allen andern das Zeichen läſst, das die ihr entſprechende im Urſyſtem hat.

Hieraus können wir ſchlieſsen, daſs die Zeichen + und — wirklich zwey ſehr verſchiedene Verrichtungen in der Rechnung haben; erſtlich Addition oder Subtraktion anzuzeigen; zweytens die ſucceſſiven Veränderungen auszudrücken, die in einem veränderlichen Syſteme eintreten, und die verſchiedenen Grade der Conformität, oder Nicht-Conformität zu bemerken, die es in den verſchiedenen Zuſtänden der Umformung in Hinſicht auf ſeinen erſten Zuſtand behält.

Dieſe beyden Verrichtungen haben zugleich ſtatt, als wechſelſeitige Folgen, und nicht Kraft verſchiedener Uebereinkunft. Wäre es, wie man oft annimmt, Kraft verſchiedener Uebereinkunft, ſo müſste man beweiſen, daſs dieſe Uebereinkünfte nichts mit

einander Unverträgliches haben, und dafs ſie zu denſelben Regeln für die Zuſammenſtellung der Zeichen in algebraiſchen Verrichtungen führen. Aber weil ſie, wie man eben geſehen hat, nothwendige wechſelſeitige Folgen ſind, ſo leuchtet daraus die Identität der abgeleiteten Regeln deutlich hervor.

26. Das neue Zeichen, das ſo jeder Werth erhält, wird ſein Zeichen der Correlation genannt, und dieſe Quantität zuſammen mit ihrem Zeichen der Correlation genommen, ihr Werth der Correlation. So, indem man annimmt, dafs $P$ der abſolute Werth von irgend einer der Quantitäten des Urſyſtems ſey, $p$ der abſolute Werth der ihr im umgeformten Syſtem entſprechenden Quantität, ſo wird, wenn die letzte Quantität invers iſt, — ihr Zeichen der Correlation, und $-p$ ihr Werth der Correlation ſeyn.

27. Weil nach dieſen Definitionen das Zeichen der Correlation irgend einer Gröſse das iſt, was ſie annehmen mufs, wenn man auf das indirekt correlative Syſtem, deſſen Theil ſie iſt, die Formeln des Urſyſtems anwenden will, ſo folgt deutlich aus dem vorher bewieſenen Grundſatze, dafs jede Quantität, die in dem indirekt correlativen Syſteme direkt bleibt, + als Zeichen der Correlation hat, und dafs umgekehrt jede Gröſse des indirekt correlativen Syſtems, wenn ſie + als Zeichen der Correlation hat, direkt bleibt. Dafs eben ſo jede Quantität, die in dem indirekt correlativen Syſtem invers wird, — als Zeichen der Correlation hat, und umgekehrt jede Quantität

des indirekt correlativen Syſtems, die — zum Zeichen der Correlation hat, invers wird.

Wir wollen z. B. annehmen, wenn $a$ eine beſtändige, oder allgemeiner eine direkte Quantität, und $x$ eine veränderliche iſt, entdeckt man, daſs das, was $a+x$ im Urſyſteme war, $a-x$ im umgeformten Syſteme wird, ohne daſs ſonſt eine Quantität weder durch o, noch durch $\infty$ gegangen ſey. Hier ſchlieſst man, daſs $x$ invers geworden ſey, weil es ſein Zeichen verändert hat in einer Verrichtung, wo ſonſt nur Quantitäten ſind, die nicht ihr Zeichen verändert haben. Denn nimmt man für das Urſyſtem $a+x=q$, ſo wird dieſe Gleichung für das umgeformte Syſtem nach der Hypotheſe $a-x=q$; man hat alſo für den erſten Fall $x=q-a$, und für den zweyten $x=a-q$, alſo ſind $a$ und $q$ zur inverſen Ordnung übergegangen, alſo iſt ihr Unterſchied $x$ invers geworden. Es würde eben ſo ſeyn, wenn das, was $a-x$ im Urſyſtem wäre, $a+x$ im umgeformten würde.

Eben ſo in irgend einer Rechnung, um ſich zu verſichern, ob ein veränderliches $x$ direkt bleibt, oder invers wird, braucht man blofs zu betrachten, was eine Funktion wird, in der $x$ ſich mit andern Gröſsen, die alle direkt geblieben ſind, vermiſcht findet. Entdeckt man, daſs in dieſer Funktion weder die veränderliche, noch irgend eine von den andern ihr Zeichen verändere, ſo iſt das ein Beweis, daſs dieſe veränderliche auch direkt geblieben iſt. Aber findet man, daſs, wenn die andern alle ihr Zeichen behalten müſſen, nur die veränderliche es verändern muſs, ſo iſt dieſs ein Beweis, daſs ſie invers wird;

Verhältniſs zu kennen, dieſs Verhältniſs, als Gränze oder als erſter und letzter Werth, das Verhältniſs der Gränzen derſelben Quantitäten haben werde, und gerade dieſs Verhältniſs der Gränzen oder der Gränze des Verhältniſſes zweyer Quantitäten des umgeformten Syſtems, nennt man erſtes oder letztes Verhältniſs derſelben Quantitäten.

Iſt der Zuſtand der Umformung des Syſtems noch nicht beſtimmt, und nimmt man den Unterſchied jeder Quantität von ihrer Gränze, ſo ſind dieſe Unterſchiede das, was man unter dem Namen der unendlich kleinen bezeichnet; d. h. man nennt unendlich klein den Unterſchied einer unbeſtimmten Quantität von ihrer Gränze, weil man wirklich zu gleicher Zeit dieſe Unterſchiede ſo klein machen kann, als man will, indem man das umgeformte Syſtem, ſo viel man will, dem Urſyſtem nähern und zugleich alle dieſe Quantitäten verſchwinden laſſen kann, indem man die Annäherung der beyden Syſteme ſo weit treibt, bis ſie in einander fallen.

Man ſieht alſo, daſs die Gränze von jeder dieſer Quantitäten, die unendlich klein genannt werden, Null iſt. So kann man ſie alſo beſtimmen, indem man ſagt, man nennt unendlich klein jede Quantität, die Null zur Gränze hat. Dieſe Definition iſt ſtreng genau. Eine unendlich kleine Quantität iſt darum nicht keine Quantität, ſondern eine Quantität, deren Gränze Null iſt, und dieſer einfache Begriff verbannt alle Schwierigkeiten aus den Anfangsgründen der Analyſis des Unendlichen. Wir haben oben geſagt, daſs das letzte Verhältniſs zweyer veränderlichen Quantitäten nichts

nichts anders ist, als das Verhältnifs ihrer Gränzen. Dieſs ſieht man vollkommen ein, ſo lange dieſe Gränzen nicht Null ſind, d. h. ſo lange dieſe verglichenen veränderlichen Quantitäten nicht die ſind, die man unendlich klein nennt. In dieſem letzten Fall, da das Verhältnifs der Gränzen auf $\frac{0}{0}$ zurückkommt, nimmt das letzte Verhältnifs dieſer Quantitäten, wie man ſieht, eine unbeſtimmte Geſtalt an. Welches iſt nun der Werth dieſer Unbeſtimmten? Hier liegt der Grund der Schwierigkeit der Analyſis des Unendlichen. Aber dieſe Schwierigkeit hört ſogleich auf, wenn man betrachtet, daſs dieſem letzten Verhältnifs, da es nichts anders iſt, als das Ziel, dem ſich mehr und mehr das Verhältnifs dieſer Quantitäten ſelbſt nähert, ſo wie das umgeformte Syſtem dem Punkte, wo es in das Urſyſtem fällt, näher kommt, daſs dieſem Verhältniſſe ſelbſt ſein Werth durch das Geſetz der Stetigkeit beſtimmt iſt, und daſs es ſo aus dem Zuſtande der Unbeſtimmtheit kommt.

20. Wenn in einer ſtreng genauen Gleichung unendlich kleine Quantitäten ſich mit andern vermiſcht finden, die es nicht ſind, und man dieſe Gleichung auf 2 Ausdrücke bringen kann, deren Verhältnifs ſelbſt eine unendlich kleine Quantität iſt, ſo beweiſt die Methode der Unbeſtimmten, daſs jeder dieſer Ausdrücke für ſich nothwendig $= 0$ iſt. Denn wenn man annimmt, daſs $X + Y = 0$ dieſe genaue Gleichung, und daſs $\frac{Y}{X}$ eine unendlich kleine Quantität ſey, ſo behaupte ich, daſs nothwendig $X$ und $Y$

jedes für ſich genommen $= o$ ſeyn müſſen. Wir wollen annehmen, $X$ ſey nicht o, ſo theile ich alles durch $X$ und erhalte $1 + \frac{Y}{X} = o$; aber nach der Hypotheſe iſt $\frac{Y}{X}$ eine unendlich kleine Gröſse; d. h. indem man das umgeformte Syſtem dem Urſyſteme nähert, kann man $\frac{Y}{X}$ ſo klein machen als man will; alſo wenn $X$ nicht o iſt, ſo kann man machen, daſs 1 ſo wenig, als man will, von o unterſchieden ſey, was abſurd iſt. Alſo hat man wirklich $X = o$, eine Gleichung, die, von der nach der Hypotheſe eben ſo genauen Gleichung $X + Y = o$ abgezogen, $Y = o$ giebt. Alſo ſind $X$ und $Y$ jede allein $= o$, und da $Y$ auch nach der Hypotheſe die Vereinigung aller Ausdrücke iſt, deren Verhältniſs zu $X$ als unendlich klein angenommen iſt, ſo folgt, daſs man alle dieſe Ausdrücke übergehen kann, um bloſs die Gleichung $X = o$ ſtehen zu laſſen. Dieſs iſt der Grundſatz der Analyſis des Unendlichen, die, wie man ſieht, nur eine Anwendung der Methode der Unbeſtimmten iſt.

Da ich den Veränderungen des umgeformten Syſtems folgen wollte, von dem Augenblick, wo es ſich von dem Urſyſteme losreiſst, muſste ich auch einen Blick auf den Zuſtand der Unbeſtimmtheit werfen, in welchem es bleibt, bis ſeine erſten Gränzen von dem Rechner verändert ſind; d. h. bis er ihm irgend einen andern beſtimmten Zuſtand angewieſen hat. Zur gehörigen Entwickelung der vorigen Be-

griffe würde freylich mehr Raum gehören. In einem andern Werke, das unter dem Titel:

*Réflexions ſur la métaphyſique du calcul infinitéſimal*,

gedruckt iſt, habe ich es zu thun verſucht, das man alſo als einen Theil dieſes Werkes anſehen kann. Ich nehme jetzt den Faden bey (18) wieder auf.

21. Statt, wie ich eben gethan habe, den Unterſchied jeder der Quantitäten des umgeformten Syſtems von ſeiner Gränze zu betrachten, betrachte ich jetzt die Differenz von irgend zwey Quantitäten des umgeformten Syſtems von einander, und vergleiche ſie mit der Differenz der dieſen Quantitäten entſprechenden Gränzen. Dieſs angenommen:

Wird der Unterſchied von irgend zwey Quantitäten des umgeformten Syſtems in direktem Sinn oder bloſs direkt genannt werden, wenn, indem man dieſe beyden Quantitäten mit den ihnen im Urſyſtem entſprechenden vergleicht, die, die im umgeformten Syſtem die gröſste iſt, während der ganzen Veränderung derjenigen, die im Urſyſtem die gröſste war, entſpricht, und eben ſo die kleinſte des einen, der kleinſten des andern, ohne daſs eine von beyden aufgehört hätte endlich zu ſeyn, d. h. nicht durch o und $\frac{1}{0}$, oder $\infty$ gegangen iſt.

Wenn hingegen die, die im Urſyſtem die gröſste war, im umgeformten die kleinſte geworden iſt, und umgekehrt, während daſs dieſe beyden veränderlichen Quantitäten beyde beſtändig endlich geblieben, d. h. weder durch o, noch durch $\infty$ gegangen ſind, ſo

wird ihr Unterſchied in inverſem Sinn oder ſchlechtweg **invers** genannt werden.

In Hinſicht der Quantitäten ſelbſt, deren Unterſchied in direktem Sinne angenommen wird, ſagt man, daſs ſie gegenſeitig in direkter Ordnung geblieben ſind; und wird dieſer Unterſchied invers, oder findet ſich in inverſem Sinne, ſo ſagt man, daſs ſie zur inverſen Ordnung übergegangen ſind. So nennt man alſo direkt die Unterſchiede der Gröſsen, die beſtändig in Rückſicht auf einander, während der Veränderung des Syſtemes, in direkter Ordnung bleiben, und invers die Unterſchiede derer, die zur inverſen Ordnung, in Rückſicht auf einander, durch eben dieſe Veränderung übergehen, doch ohne daſs weder die eine, noch die andere aufgehört hätte endlich zu ſeyn, d. h. ohne daſs ſie durch o oder ∞ gegangen ſey.

Aber man muſs nicht vergeſſen, daſs, nach den vorher gegebenen Begriffen, in dieſen Definitionen nur von wahren Quantitäten die Rede iſt, und nicht von dem, was ich Werth genannt habe. So können die Differenzen, die hier vorkommen, nur von dem Ueberſchuſs derjenigen Gröſse verſtanden werden, die an ſich die gröſsere iſt über diejenige, die an ſich die kleinere iſt, wobey man ganz von den Zeiten abſtrahirt, und folglich ſind dieſe Unterſchiede ſelbſt wahre Quantitäten.

22. Man nehme z. B. einen Triangel $ABC$, auf deſſen Grundlinie $\overline{BC}$ aus dem entgegengeſetzten Winkel $A$ ein Perpendikel $\overline{AD}$ geſenkt ſey, von dem ich annehme, daſs er zwiſchen $B$ und $C$ fällt; wir wol-

len die Grundlinie $\overline{BC}$ mit ihren beyden Abſchnitten $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ betrachten, und annehmen, daſs der Punkt $C$ ſich gegen $B$ bewegt, bis er durch den Punkt $D$ gegangen iſt. So iſt die Grundlinie und der Abſchnitt $\overline{CD}$ alſo veränderlich, während der andere Abſchnitt $\overline{BD}$ beſtändig iſt.

Iſt dieſs angenommen, ſo wollen wir als Maaſsſtab zur Vergleichung die Urfigur nehmen, die aus dem Triangel $ABC$ und dem Perpendikel $\overline{AD}$ beſteht, und als umgeformtes Syſtem dieſelbe Figur, nachdem der Punkt $C$ ſich dem Punkte $D$ genähert hat, ohne doch bis zu ihm gelangt zu ſeyn. Dann iſt es deutlich, daſs man hier im Urſyſteme wie im umgeformten beſtändig $\overline{BC} > \overline{BD}$ haben wird, und noch mehr, daſs dieſe Quantitäten während der ganzen Veränderung endlich geblieben ſind, alſo ſind es von denen, die ich in direkter Ordnung genannt habe, und ihr Unterſchied $\overline{CD}$ iſt in direkter Richtung oder direkt.

Nachher wollen wir als umgeformtes Syſtem dieſelbe Figur nehmen, wenn der Punkt $C$ ſchon jenſeits des Punktes $D$ gegangen iſt, indem uns das Urſyſtem immer als Maaſsſtab zur Vergleichung dient. Es iſt deutlich, daſs man dann $\overline{BD} > \overline{BC}$ haben wird. Alſo nach den vorher gegebenen Begriffen ſind dieſe beyden Quantitäten zur inverſen Ordnung übergegangen, und ihr Unterſchied $\overline{CD}$ iſt invers oder in inverſer Richtung, d. h. in verkehrter Richtung von dem, was ſie in der Urfigur waren, die noch immer als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen wird.

aus folgt augenſcheinlich, wenn das Reſultat dieſer Betrachtungen für das eine Syſtem eine gewiſſe Formel iſt, die man unmittelbar darauf anwenden kann, daſs dieſelbe Formel auch auf das andere Syſtem unmittelbar anwendbar ſeyn wird, d. h. daſs, um auf dieſes die für das erſte gefundene Formel anzuwenden, man keine andere Veränderung zu machen habe, als ſtatt der darin befindlichen Werthe die entſprechenden Werthe des andern Syſtems zu ſetzen, ohne irgend eine Veränderung der Zeichen in der Formel, was dem ſchon gegebenen Begriffe entſpricht (4). Aber wenn die Betrachtungen, die man über die beyden verglichenen Syſteme machen muſs, nicht mehr buchſtäblich dieſelben ſind, ſo ſage ich, daſs ſie unter ſich in indirekter eingebildeter oder complexer Correlation ſind, nach den mehr oder minder ſichtbaren Modifikationen, die man mit den Zeichen der Formeln, welche die Eigenſchaften des Urſyſtems ausdrücken, vornehmen muſs, um ſie auf das umgeformte Syſtem anwendbar zu machen.

Z. B. in dem ſchon betrachteten Urſyſtem (*Fig.* 1.) *A B C D* kann ich dieſe Betrachtung anſtellen. Der Triangel *A B D* giebt

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$$

und der Triangel *A C D*

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$$

Ziehet man dieſe Gleichung von der erſten ab, ſo bleibt

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2$$

Noch mehr, man hat

$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$$

ſetzt man dieſen Werth von $\overline{BD}$ in die vorige Gleichung, ſo erhält man

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CD}$$

Es iſt deutlich, daſs dieſe Betrachtung ganz und wörtlich auf das umgeformte Syſtem anwendbar iſt, ſo lange der Punkt $D$ zwiſchen $B$ und $C$ liegt, alſo iſt die vorhergehende Formel unmittelbar auf alle Fälle anwendbar, ſo lange $CD$ in direkter Richtung iſt.

Aber iſt $C$ durch den Punkt $D$ gegangen, ſo findet bloſs der erſte Theil der Betrachtung (bis an die Worte „noch mehr") ſtatt. Der zweyte kann im Gegentheil nicht auf den neuen Fall angewandt werden, weil man nicht mehr wie vorher $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD}$ hat; ſondern im Gegentheil $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC}$, d. h. weil $\overline{CD}$ invers geworden iſt. Auch wird die Endgleichung für dieſen Fall ſeyn

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{CD},$$

die von der für den erſten Fall gefundenen durch das Zeichen verſchieden iſt, das den letzten Ausdruck afficirt, indem es — für den erſten Fall, und + für den zweyten iſt.

24. Wir wollen ſehen, was im Allgemeinen ſtatt findet, ſowohl wenn in den Formeln, die die Eigenſchaften des Syſtems ausdrücken, indirekte Quantitäten kommen, als auch wenn die Veränderung des Syſtems die Einführung einer, oder zweyer inverſer Quantitäten erfordert, damit ſie ihm immer unmittelbar anwendbar ſeyen.

$M$, $N$, ſeyen irgend zwey Quantitäten des Urſyſtems; $m$, $n$, die entſprechenden Quantitäten des zwey-

ten Syſtems. Dieſs angenommen, ſo werden nach der Definition, ſo lange die beyden Syſteme direkt correlativ bleiben, $m$ und $n$ genau im zweyten Syſtem dieſelbe Rolle ſpielen, wie die ihnen entſprechenden $M$, $N$, im erſten.

Noch mehr, wenn man z. B. $M \geqq N$ annimmt und auch $m \geqq n$ hat, ſo werden die letztern Quantitäten in direkter Ordnung ſeyn und ihr Unterſchied $m - n$ in direkter Richtung, d. h. wenn man den Unterſchied der beyden erſten $M$, $N$, $= P$ nennt, und $p$ den Unterſchied der beyden letzten $m$, $n$, ſo wird dieſe Quantität $p$ eine direkte Quantität ſeyn.

Nun weil $M \geqq N$ werden wir haben

$$P = M - N, \text{ und } p = m - n$$

oder $M = N + P$, und $m = n + p$

Wir wollen in die Formeln, von denen wir eben ſprachen, dieſe jedesmaligen Werthe von $M$ und $m$ ſetzen, ſo iſt es deutlich, daſs dieſe Formeln, die vor der Umformung ähnlich waren, es auch hernach ſeyn werden, weil anſtatt der ſich entſprechenden Quantitäten $M$, $m$, die dieſelbe Rolle darin ſpielten, man darin die Werthe $N + P$, $n + p$, ſubſtituirt hat, die noch dieſelben Formen haben.

Alſo, ſo lange nur in der Rechnung direkte Quantitäten vorkommen, werden die ſich entſprechenden Formeln im Urſyſtem und im umgeformten unter ſich ähnlich bleiben, weil wirklich die neuen Betrachtungen, die man zu den erſten hinzugefügt hat, d. h. zu denen, durch die die Formeln gefunden wurden, noch genau dieſelben von beyden Seiten geweſen ſind.

Jetzt wollen wir ſehen, was eintritt, wenn in die Formel eine inverſe Quantität gebracht werden muſs.

Angenommen, daſs wir noch immer $M > N$, aber im Gegentheil $n > m$ haben, d. h. daſs dieſe letzten in Hinſicht auf die erſten in inverſer Ordnung ſind, ſo wird ihr Unterſchied nicht mehr wie vorher $m - n$, ſondern $n - m$ ſeyn, und man wird für dieſen Fall auf einer Seite $P = M - N$ und auf der andern $p = n - m$ oder $M = N + P$, und $m = n - p$ haben.

Wir wollen dieſe Werthe von $M$ und $m$ in die ſich entſprechenden Formeln ſetzen, die bis dahin für beyde Syſteme ähnlich waren, ſo werden ſie aufhören es nach dieſer Subſtitution zu ſeyn: denn in die eine hat man $N + P$ ſtatt $M$ geſetzt, in die andere $n - p$ ſtatt $m$; es wird alſo zwiſchen den neuen Formeln der Unterſchied ſeyn, daſs die Werthe der Quantitäten $P$ und $p$ von verſchiedenen Zeichen afficirt ſind. Um alſo von den Formeln des Urſyſtems zu denen des umgeformten Syſtems überzugehen, iſt es genug, wie vorher, in den erſten für die darin befindlichen abſoluten Werthe, die abſoluten ihnen entſprechenden Werthe des andern Syſtems zu ſetzen, und auſserdem noch das Zeichen der Quantität $p$ zu ändern, die invers geworden iſt.

Da man nun dieſelbe Betrachtung auf alle andere Quantitäten, die gleichfalls invers geworden ſind, anwenden kann, ſo iſt es deutlich, daſs man auch dieſen allgemeinen Grundſatz aufſtellen kann.

25. Um die Formeln irgend eines Syſtems von Quantitäten auf ein anderes

Syſtem anwendbar zu machen," das ihm indirekt correlativ iſt, muſs man

1) die Correlation der abſoluten Werthe feſtſetzen, indem man für jeden derſelben, der zum Urſyſtem gehört, das als Mittel der Vergleichung angenommen wird, den abſoluten Werth, der ihm im andern Syſteme entſpricht, ſetzt;
2) die Correlation der Zeichen aufſtellen, indem man in den Formeln das Zeichen jeder Quantität, die ſich in inverſer Richtung im zweyten Syſtem findet, verändert, und im Gegentheil allen andern das Zeichen läſst, das die ihr entſprechende im Urſyſtem hat.

Hieraus können wir ſchlieſsen, daſs die Zeichen + und — wirklich zwey ſehr verſchiedene Verrichtungen in der Rechnung haben; erſtlich Addition oder Subtraktion anzuzeigen; zweytens die ſucceſſiven Veränderungen auszudrücken, die in einem veränderlichen Syſteme eintreten, und die verſchiedenen Grade der Conformität, oder Nicht-Conformität zu bemerken, die es in den verſchiedenen Zuſtänden der Umformung in Hinſicht auf ſeinen erſten Zuſtand behält.

Dieſe beyden Verrichtungen haben zugleich ſtatt, als wechſelſeitige Folgen, und nicht Kraft verſchiedener Uebereinkunft. Wäre es, wie man oft annimmt, Kraft verſchiedener Uebereinkunft, ſo müſste man beweiſen, daſs dieſe Uebereinkünfte nichts mit

einander Unverträgliches haben, und dafs ſie zu denſelben Regeln für die Zuſammenſtellung der Zeichen in algebraiſchen Verrichtungen führen. Aber weil ſie, wie man eben geſehen hat, nothwendige wechſelſeitige Folgen ſind, ſo leuchtet daraus die Identität der abgeleiteten Regeln deutlich hervor.

26. Das neue Zeichen, das ſo jeder Werth erhält, wird ſein Zeichen der Correlation genannt, und dieſe Quantität zuſammen mit ihrem Zeichen der Correlation genommen, ihr Werth der Correlation. So, indem man annimmt, dafs $P$ der abſolute Werth von irgend einer der Quantitäten des Urſyſtems ſey, $p$ der abſolute Werth der ihr im umgeformten Syſtem entſprechenden Quantität, ſo wird, wenn die letzte Quantität invers iſt, — ihr Zeichen der Correlation, und $-p$ ihr Werth der Correlation ſeyn.

27. Weil nach dieſen Definitionen das Zeichen der Correlation irgend einer Gröſse das iſt, was ſie annehmen mufs, wenn man auf das indirekt correlative Syſtem, deſſen Theil ſie iſt, die Formeln des Urſyſtems anwenden will, ſo folgt deutlich aus dem vorher bewieſenen Grundſatze, dafs jede Quantität, die in dem indirekt correlativen Syſteme direkt bleibt, + als Zeichen der Correlation hat, und dafs umgekehrt jede Gröſse des indirekt correlativen Syſtems, wenn ſie + als Zeichen der Correlation hat, direkt bleibt. Dafs eben ſo jede Quantität, die in dem indirekt correlativen Syſtem invers wird, — als Zeichen der Correlation hat, und umgekehrt jede Quantität

des indirekt correlativen Syſtems, die — zum Zeichen der Correlation hat, invers wird.

Wir wollen z. B. annehmen, wenn $a$ eine beſtändige, oder allgemeiner eine direkte Quantität, und $x$ eine veränderliche iſt, entdeckt man, daſs das, was $a+x$ im Urſyſteme war, $a-x$ im umgeformten Syſteme wird, ohne daſs ſonſt eine Quantität weder durch o, noch durch $\infty$ gegangen ſey. Hier ſchlieſst man, daſs $x$ invers geworden ſey, weil es ſein Zeichen verändert hat in einer Verrichtung, wo ſonſt nur Quantitäten ſind, die nicht ihr Zeichen verändert haben. Denn nimmt man für das Urſyſtem $a+x=q$, ſo wird dieſe Gleichung für das umgeformte Syſtem nach der Hypotheſe $a-x=q$; man hat alſo für den erſten Fall $x=q-a$, und für den zweyten $x=a-q$, alſo ſind $a$ und $q$ zur inverſen Ordnung übergegangen, alſo iſt ihr Unterſchied $x$ invers geworden. Es würde eben ſo ſeyn, wenn das, was $a-x$ im Urſyſtem wäre, $a+x$ im umgeformten würde.

Eben ſo in irgend einer Rechnung, um ſich zu verſichern, ob ein veränderliches $x$ direkt bleibt, oder invers wird, braucht man blofs zu betrachten, was eine Funktion wird, in der $x$ ſich mit andern Gröſsen, die alle direkt geblieben ſind, vermiſcht findet. Entdeckt man, daſs in dieſer Funktion weder die veränderliche, noch irgend eine von den andern ihr Zeichen verändere, ſo iſt das ein Beweis, daſs dieſe veränderliche auch direkt geblieben iſt. Aber findet man, daſs, wenn die andern alle ihr Zeichen behalten müſſen, nur die veränderliche es verändern muſs, ſo iſt dieſs ein Beweis, daſs ſie invers wird;

denn ſtellt man dieſe Funktion durch $X$ dar, und zieht aus dieſer Gleichung, nachdem man $X = Q$ gemacht hat, den Werth von $X$ als unbekannt, ſo hat ſie für beyde Syſteme dieſelbe Form, wenn ſie nicht das Zeichen verändert hat, aber hat ſie dieſs, ſo muſs man, um daſſelbe Reſultat zu erhalten, es von neuem verändern; alſo wird im erſten Fall $X$ direkt geblieben, im zweyten $X$ invers geworden ſeyn.

28. Im Allgemeinen, um an den Veränderungen, die die Zeichen der Werthe betreffen, welche die verſchiedenen Quantitäten im umgeformten Syſteme annehmen, zu erkennen, ob dieſe Quantitäten direkt bleiben, oder invers werden, iſt es deutlich nach dem Geſagten, daſs man dieſelbe Regel befolgen muſs, welche die Algebra für die Verbindung der Zeichen aufſtellt; d. h. daſs die Summe von zwey Quantitäten, wovon jede direkt geblieben iſt, auch direkt bleibt; daſs die Summe zweyer inverſer Quantitäten ſelbſt invers iſt; daſs die Summe einer direkten und inverſen Quantität ſelbſt direkt oder invers iſt, nachdem die erſtere die gröſsere oder die kleinere von beyden iſt; daſs das Produkt zweyer Quantitäten, die beyde direkt oder beyde invers ſind, immer ſelbſt direkt iſt, eben ſo wie ihr Quotient, und daſs im Gegentheil, nimmt man eine direkte und eine inverſe Quantität, ſowohl Produkt als Quotient invers ſind.

Das kann auch geradezu für jeden einzelnen Fall bewieſen werden. Ich nehme z. B. an, daſs $p$, $q$ zwey inverſe Quantitäten ſeyen, ſo iſt $pq$ eine direkte Quantität. In der That, nach den Definitionen, wenn man annimmt, daſs $p$, $q$ im Urſyſtem $P$, $Q$ ſeyen,

muſs $P$ der Unterſchied $M-N$ zweyer Quantitäten ſeyn, von denen die gröſsere $M$ im umgeformten Syſteme die kleinere wird, d. h. $p = n - m$, indem man annimmt, daſs $m$, $n$ den Quantitäten $M$, $N$ entſprechen. Eben ſo muſs $Q$, wenn es $M' - N'$ im Urſyſtem iſt, $n' - m'$ im umgeformten Syſteme werden, indem man annimmt, daſs $m'$, $n'$ den Quantitäten $M'$, $N'$ entſprechen. Hier muſs man alſo beweiſen, daſs $(n-m).(n'-m')$ oder

$$(mm' + nn') - (nm' + mn')$$

eine direkte Quantität ſey. Sie entſpricht dem Produkte $(M-N).(M'-N')$ oder $(MM' + NN') - (NM' + MN')$; aber da $M \geq N$, $M' \geq N'$, $n \geq m$, $n' \geq m'$, ſo iſt es deutlich, daſs $(M-N).(M'-N')$ und $(n-m).(n'-m')$ wahre Quantitäten ſind, alſo

$$(MM' + NN') \geq (NM' + MN') \text{ und}$$
$$(mm' + nn') \geq (nm' + mn').$$

Alſo ſind die beyden letzten Quantitäten in derſelben Ordnung im umgeformten Syſteme, wie die ihnen im Urſyſteme entſprechenden; alſo iſt ihr Unterſchied eine direkte Quantität; aber dieſer Unterſchied

$$(mm' + nn') - (nm' + mn') = (n-m).(n'-m') = pq$$

alſo iſt $pq$ eine direkte Quantität, was zu erweiſen war.

29. Wenn in zwey Syſtemen, die mit einem Urſyſteme correlativ ſind, zwey ſich entſprechende Quantitäten daſſelbe Zeichen der Correlation haben, ſo ſagen wir, daſs dieſe Quantitäten unter ſich in direkter Correlation ſind, ſelbſt wenn das Zeichen der Correlation — iſt; d. h. wenn ſelbſt jede dieſer Quantitäten ſich in inverſer Correlation mit der, ihr

im Urſyſteme entſprechenden, befände; weil, wenn man, wie man immer kann, eines dieſer neuen Syſteme als Maaſsſtab zur Vergleichung annimmt, das Zeichen der Correlation der Quantität, die zu dem andern gehört, wieder [illegible] würde; denn dieſe beyden ſich entſprechenden Quantitäten ſind wohl, eine wie die andere, invers, in Hinſicht auf das Syſtem, das jetzt als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt; aber eine iſt in Hinſicht auf die andere in direktem Sinn.

30. Wenn zwey correlative Syſteme als ein und daſſelbe veränderliche Syſtem in zwey verſchiedenen Lagen betrachtet werden, wie z. B. das Syſtem der Coordinaten bey einer Curve; indem die correlativen Quantitäten dann durch dieſelben Buchſtaben ausgedrückt ſind, z. B. die Abſciſſen durch $x$, und die Ordinaten durch $y$; und ſo die erſte Forderung des vorher ausgedrückten Grundſatzes (25) erfüllt iſt; ſo braucht man blofs, um für das eine Syſtem die Formeln des andern anwendbar zu machen, die zweyte Forderung zu erfüllen, d. h. die Correlation der Zeichen aufzuſtellen. Alſo:

Um auf ein Syſtem von veränderlichen Quantitäten, wenn es zu irgend einer beſtimmten Lage gekommen iſt, die Formeln anwendbar zu machen, die für irgend eine andere Lage gefunden ſind, die indirekt correlativ mit der andern iſt, braucht man nur darin das Zeichen jeder veränderlichen Quantität zu verändern, die durch die Veränderung

änderung des Syſtems invers geworden iſt.

Aber da es gleichgültig für das Reſultat iſt, das Zeichen irgend einer Gröſse im Anfange, in der Mitte, oder am Ende zu verändern, ſo kann man, wie man auch gewöhnlich zur Uebereinſtimmung und Einfachheit der Rechnungen thut, für das Syſtem, in allen möglichen Stellungen betrachtet, blofs die Formeln des Syſtems gebrauchen, das als Maafsſtab zur Vergleichung angenommen iſt, und auf das die Betrachtungen gegründet ſind, wenn man nur bey der Anwendung das Zeichen der Quantitäten ändert, die in jedem Fall ſich in inverſem Sinne finden.

31. Hat man ſo, wie eben geſagt, die Veränderungen der Zeichen gemacht, ſo werden die Formeln für das umgeformte Syſtem paſſend, d. h. eben und dieſelben mit denen ſeyn, die man gefunden hätte, wenn man die Betrachtung auf dieſes umgeformte Syſtem ſelbſt gegründet hätte, ſtatt ſie auf das Urſyſtem zu gründen. Alſo noch einmal:

1) In den Formeln, die unmittelbar anwendbar auf irgend ein Syſtem ſind, zeigen die Zeichen + und — nur ausführbare Verrichtungen an den abſoluten Quantitäten an, deren Werthe ſie afficiren.

2) Es iſt keine Veränderung der Zeichen in den Formeln des Urſyſtems vorzunehmen, um ſie unmittelbar anwendbar auf die Syſteme zu machen, die mit ihm in direkter Correlation ſtehen.

3) Damit die Formeln des Urſyſtems unmittelbar anwendbar auf irgend ein anderes Syſtem werden können, das ihm indirekt correlativ iſt, ſo muſs man in den Formeln das Zeichen jeder Quantität verändern, die im indirekt correlativen Syſtem invers wird.

32. Man ſieht hieraus, daſs, wenn man Formeln hat, die auf irgend ein Syſtem von Quantitäten unmittelbar anwendbar ſind, und darin das Zeichen einer oder mehrerer Quantitäten verändert, dieſe Formeln dadurch aufhören können auf daſſelbe Syſtem unmittelbar anwendbar zu ſeyn, und daſs, um das Syſtem zu finden, für das ſie anwendbar geworden ſind, man aus allen möglichen indirekt correlativen Syſtemen dasjenige ſuchen muſs, auf das die in den Zeichen vorgenommenen Veränderungen paſſen, und ſo paſſen, daſs ſie nur ausführbare Verrichtungen in den Formeln anzeigen.

Eben ſo, wenn man irgend ein Syſtem hat und es durch unmerkbare Veränderung umſchafft, ſo muſs man, um die Formeln zu finden, die ihm in ſeinem neuen Zuſtande unmittelbar anwendbar ſind, auf alle mögliche Art die Zeichen der Quantitäten, die zur Zuſammenſetzung des Urſyſtems gehören, verändern, und dann bey aller dieſer Veränderung der Zeichen ausforſchen, welche die ſind, die der Umformung des Syſtems Genüge leiſten können.

33. Es wäre möglich, daſs keine Veränderung von + in —, mit den Quantitäten in den Formeln des Urſyſtems vorgenommen, der Umformung dieſes

Syſtems Genüge leiſtete, und daſs man einige oder alle Zeichen von + in $\sqrt{-1}$ oder andere eingebildete Wurzeln der Einheit verändern müſste. In dieſem Fall wäre das umgeformte Syſtem mit dem erſten weder direkt, noch indirekt correlativ; und folglich fänden die vorher aufgeſtellten Grundſätze hier nicht mehr ihre Anwendung, weil ſie nur in der Vorausſetzung aufgeſtellt ſind, daſs beyde Syſteme in Correlation wären, einerley, ob in direkter oder indirekter. Doch würde das neue Syſtem mit dem Urſyſteme eine Art von Analogie behalten, von der ich weiter unten reden werde, und die ich mit dem Namen eingebildete Correlation bezeichnet habe.

34. Da man alſo, um die Formeln eines Urſyſtems auf ein indirekt correlatives Syſtem, in dem nur eine inverſe Quantität wäre, anwendbar zu machen, nothwendig ihr Zeichen verändern muſs; ſo folgt, daſs wechſelſeitig, wenn man dieſe invers gewordene Quantität als unbekannt in dieſen Formeln annimmt, und ihren Werth daraus zieht, das, was man durch Auflöſung der Gleichung erhält, nicht der geſuchte Werth ſelbſt, aber wohl dieſer Werth mit negativem Zeichen ſey. Denn da man nicht das Zeichen dieſer Quantität in den Urformeln verändert hat, ſo muſs man es nothwendigerweiſe im Reſultate ändern, um dieſs Reſultat genau, d. h. anwendbar auf das umgeformte Syſtem zu machen.

35. Wenn wir annehmen, daſs man nicht gleich weiſs, ob die geſuchte Quantität direkt oder invers iſt, ſo kann man daraus, daſs ihr Werth negativ iſt,

ſchlieſsen, daſs ſie invers ſey, d. h. daſs das Syſtem, zu dem ſie gehört, nur mit dem Urſyſtem eine indirekte Correlation habe, und daſs, um dieſs neue Syſtem zu kennen, man bey allen möglichen correlativen Syſtemen das ſuchen müſſe, dem die Formeln des Urſyſtems Genüge leiſten können, wenn man das Zeichen der als invers anerkannten Quantität darin geändert hat.

36. Folglich, wenn, bey der Auflöſung einer Aufgabe, man für die Unbekannte einen negativen Werth fände, ſo würde dieſs ein Beweis ſeyn, daſs die Aufgabe, ſo wie ſie aufgeſtellt iſt, nicht auflösbar ſey, und daſs, um ſie dazu zu machen, man ihren Ausdruck modificiren müſſe. Die Aufgabe könnte auch nicht genau in Gleichung geſetzt ſeyn, weil man das Syſtem anders angenommen hätte, als es ſich wirklich findet; d. h. weil man ſtatt des Syſtems, auf das die Betrachtung gegründet ſeyn ſoll, vielleicht ein anderes genommen hat, das mit dem erſtern nur in indirekter Correlation ſteht. Um dieſe Gleichungen zu berichtigen, und das wahre Syſtem zu finden, auf das ſich die Frage bezieht, wenn ſie überhaupt auflösbar iſt, muſs man in allen Gleichungen, durch die man zum gefundenen Reſultat gekommen iſt, und in dieſem Reſultate ſelbſt das Zeichen der Unbekannten ändern, und dann unterſuchen, welches das neue Syſtem ſey, auf das dieſe Gleichungen und dieſs Reſultat unmittelbar anwendbar werden. Denn auf dieſes neue Syſtem müſſen die Betrachtungen gegründet ſeyn, hierauf beziehen ſich die ſo berichtigten Gleichungen, und folglich iſt es dieſs Syſtem und

dieſe berichtigten Gleichungen, die die Auflöſung der Aufgabe geben werden.

Z. B. man ſoll den Abſchnitt $\overline{CD}$ in dem Dreyeck $ABC$ finden (*Fig.* 1.), indem man die 3 Seiten als bekannt annimmt, und ſo, daſs $\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.

Da wir noch nicht wiſſen, ob der Punkt $C$ ſich zwiſchen $B$ und $D$ befindet, oder ob der Punkt $D$ zwiſchen $B$ und $C$ ſeyn ſoll, ſo wollen wir für's erſte die Rechnung auf dieſe letzte Vorausſetzung gründen.

Wir haben dann (23)

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2.$$

Ferner weil wir annehmen, daſs $D$ zwiſchen $B$ und $C$ fällt, ſo haben wir auch $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC}$ oder $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD}$. Setzt man dieſen Werth von $\overline{BD}^2$ in die obige Gleichung, ſo erhält man

$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CD}$, was, weil $\overline{AC} = BC = \frac{2}{3}\overline{AB}$ nach der Reduktion $\overline{CD} = -\frac{1}{12}\overline{AB}$.

d. h. die Rechnung giebt für die Unbekannte $\overline{CD}$ einen negativen Werth. Alſo iſt das Problem, wenn es überhaupt auflösbar iſt, nicht richtig in Gleichung geſetzt, weil man die Betrachtungen auf ein anderes Syſtem, als es wirklich ſeyn muſs, gegründet hat, d. h. auf ein Syſtem, das ſich nicht mit den aufgeſtellten Bedingungen vereinigen läſst. Man muſs alſo dieſs Syſtem, und die Gleichungen, die uns zum gefundenen Reſultat geführt haben, berichtigen, indem man in dieſen Gleichungen und im Reſultat das Zeichen von $\overline{CD}$ verändert, und dann unterſucht, welches neue Syſtem dieſer Veränderung Genüge leiſten könne.

Nun wird die Gleichung, die $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$ war, durch dieſe Veränderung

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD},$$

welche nicht ſtatt haben kann, wenn der Punkt $C$ ſich nicht zwiſchen $B$ und $D$ befindet. Dieſs iſt alſo das neue Syſtem, dem die Veränderung des Zeichens von $\overline{CD}$ Genüge leiſtet, d. h. das wahre Syſtem, auf das man die Betrachtung gründen muſs. Wenn man alſo auch das Zeichen von $\overline{CD}$ im Reſultate oder der Endgleichung, die wir gefunden haben,

$$\overline{CD} = -\tfrac{1}{12}\overline{AB}$$

verändert, haben wir als berichtigtes Reſultat $\overline{CD} = \tfrac{1}{12}\overline{AB}$. Alſo das wahre Syſtem, das den Bedingungen der Aufgabe genug thut, iſt das, in dem man annimmt, daſs $C$ zwiſchen $B$ und $D$ falle, und der wahre Werth von $\overline{CD}$ iſt $CD = \tfrac{1}{12}\overline{AB}$. Wirklich findet man auch dieſen Werth für $\overline{CD}$, wenn man die Rechnung in der letzten Vorausſetzung wieder anfängt.

37. Hätte die Gleichung mehrere Wurzeln, theils poſitive, theils negative, ſo würden die erſten zeigen, daſs die aufgeſtellten Bedingungen wirklich mit dem Syſtem von Quantitäten, auf das die Betrachtungen gegründet waren, übereinkamen; und jede von ihnen würde in der That der aufgegebenen Frage Genüge leiſten. Im Gegentheil könnten die negativen Wurzeln, da ſie nicht wirkliche Quantitäten ſind, nicht dieſen Bedingungen Genüge leiſten, ohne vorher modificirt zu ſeyn, oder ohne daſs man die Vorausſetzungen, auf die man die Betrachtungen gründete, modificirte. Daher folgt, daſs dieſe Wurzeln ſich

nicht genau auf die in Gleichung gesetzte Frage beziehen, sondern dass sie blos andere mit dieser analoge Fragen anzeigen können: dass, um zu finden, welche diese andern Fragen sind, wenn sie überhaupt da sind, man das Zeichen der Unbekannten, sowohl in der Endgleichung, als auch in denen, die laut der Rechnung dahin geführt haben, verändern muss, und dann untersuchen, welches das neue System sey, oder die neuen Bedingungen, die dieser Veränderung der Zeichen Genüge leisten können.

Wir wollen z. B. annehmen, der Gegenstand der Aufgabe sey: auf der unbestimmten geraden Linie $\overline{FG}$ (*Fig.* 2.) einen Punkt $M$ zu finden, der gewissen Bedingungen entspräche, man habe ferner auf der Linie einen festen Punkt $F$ genommen, und die Frage darauf zurückgebracht, die Entfernung $\overline{FM}$, die man als unbekannt ansieht, zu finden, man habe endlich für eben diese Unbekannte, die ich $x$ nenne, zwey Werthe gefunden, den einen positiv, den andern negativ: so giebt der erste augenscheinlich den gesuchten Punkt $M$; aber was bedeutet die andere Wurzel? Um dies zu entdecken, muss man bemerken, dass die Frage war, im Allgemeinen auf der unbestimmten geraden Linie einen Punkt $M$ zu finden, der gewissen Bedingungen entspräche, und dass, da die Frage blos in der Voraussetzung in Gleichung gesetzt ist, dass der Punkt $M$ rechts vom festen Punkte $F$ liege, man nur theilweise die aufgestellte Bedingung ausgedrückt hat; denn es ist ja auch möglich, dass der gesuchte Punkt links von $F$ liegt. Nun behaupte ich, dass der gefundene negative Werth gerade der ist, den man

links vom Punkte $F$ auftragen muſs, um dieſer zweyten Vorausſetzung zu entſprechen, d. h. wenn man annimmt, daſs die beyden durch die Gleichung gegebenen Wurzeln

$$x = m \text{ und}$$
$$x = -m'$$

ſeyen, ſo hat man als erſte Auflöſung der allgemeinen Frage, den Punkt $M$ rechts vom Punkte $F$, wie man ihn bey Setzung der Gleichung vorausgeſetzt hat, als zweyte Auflöſung den Punkt $M'$, den man erhalten wird, wenn man $m'$ links vom Punkte $F$ trägt.

In der That, weil wir nur durch die Wurzel $x = m$ der partiellen Frage entſprochen haben, wo man den Punkt $M$ rechts von $F$ annimmt, ſo wollen wir nun ſehen, was man thun muſs, um auch den Fall zu beantworten, wo man den geſuchten Punkt links von $F$ annimmt.

Statt alſo für die Unbekannte, wie vorher, die Entfernung des Punktes $F$ vom geſuchten Punkte zu nehmen, ſo wollen wir nach Belieben einen andern Punkt $K$, jenſeits des Punktes $M'$ nehmen, den man erhalten wird, wenn man $\overline{FM'} = m'$ macht, und ferner für die Unbekannte die Entfernung des neuen Punktes $K$ vom geſuchten Punkte erwählen. Dieſe Unbekannte heiſse $y$, und die willkührliche Entfernung $\overline{FK}$ heiſse $h$.

Es iſt deutlich, daſs, um den Punkt $M$ zu haben, der die ſchon oben angeführte Auflöſung giebt, ich nur in der gefundenen Gleichung $x = m$, $y - h$ an die Stelle von $x$, und im Gegentheil, wenn ich

die Gleichung in $y$ habe, um die Gleichung in $x$ wiederzufinden, $h + x$ ſtatt $y$ zu ſetzen habe.

Jetzt, um den andern Punkt zu haben, der der Frage Genüge leiſte, wenn ſich ein zweyter rechts von $K$, wie der erſte, findet, bemerke ich, daſs, wenn es wirklich einen giebt, wie er ſich denn auf derſelben Seite mit $M$ findet, ſo muſs die neue Aufgabe, wie die vorige, die den Punkt $M$ finden ſollte, in Gleichung geſetzt werden, indem die beyden Syſteme wirklich in dieſem Fall direkt correlativ ſind. Alſo muſs dieſelbe Gleichung nur zwey Auflöſungen geben, d. h. die Entfernung des Punktes $K$ vom neuen geſuchten Punkte iſt der zweyte Werth von $y$, den die Gleichung geben muſs, wo dieſe Gröſse $y$ als unbekannt angenommen iſt.

Dieſs feſtgeſetzt, wenn es nun wirklich zwey Punkte giebt, die der Frage Genüge leiſten, ſo iſt es deutlich, daſs der eine rechts, der andere links vom Punkte $F$ liegen muſs; denn hätten ſie beyde zur Rechten gelegen, ſo wäre gar kein Grund geweſen, warum die in $x$ gefundene Gleichung dem einen den Vorzug vor dem andern hätte geben ſollen; alſo giebt es einen neuen Punkt rechts von $K$, der der aufgeſtellten Frage Genüge leiſte, ſo kann er nur zwiſchen $K$ und $F$ liegen. Alſo wenn wir in dieſer neuen Gleichung, wie in der erſten, die Entfernung dieſes geſuchten Punktes von $F$, $x$ nennen, ſo hat man, weil $\overline{KF} = h$, $y = h - x$. Alſo um $x$ zu haben, muſs man in der in $y$ gefundenen Gleichung, $h - x$ ſtatt dieſer Quantität $y$ ſetzen. Aber, wie man oben geſehen hat, um den Punkt $M$ zu finden, müſste

man $h + x$, ſtatt $y$ ſetzen. Alſo ſind die beyden Gleichungen, von denen eine die Entfernung von $M$, die andere die Entfernung von $M'$ geben ſoll, bloſs durch das Zeichen der Unbekannten unterſchieden. Alſo iſt nur das Zeichen der Unbekannten in der erſtern zu ändern, um die andere zu erhalten. Alſo iſt die Wurzel, welche die neue Unbekannte giebt, genau dieſelbe mit der, welche die andere gab, nur mit negativem Zeichen; alſo giebt es in der That einen neuen Punkt, der die Frage auflöſt, und zwiſchen $K$ und $F$ genau bey'm Punkte $M'$ liegt, weil nach der Vorausſetzung, um dieſen Punkt $M'$ zu haben, man von $F$ nach $M'$ die Quantität $m'$ getragen hat, welches der Werth war, den die erſte Gleichung für $x$, mit negativem Zeichen gab.

Man ſieht, daſs der Grund, weswegen ſich eine negative Wurzel für $x$ findet, darin liegt, daſs man nur theilweiſe die Bedingungen der Aufgabe ausgedrückt hatte, indem man annahm, wie man ſie in Gleichung ſetzte, daſs der geſuchte Punkt ſich rechts von $F$ finden müſſe. Aber beyde Wurzeln werden gleich poſitiv, wenn man die Hypotheſe erweitert, indem man den feſten Punkt nach $K$ trägt, und ihr ſo die nöthige Ausdehnung giebt, damit ſie die beyden Auflöſungen umfaſſen könne, deren die Frage fähig iſt. So entſpricht jede der Wurzeln einer partiellen Frage, die man durch eine und dieſelbe Gleichung umfaſſen kann, deren beyde Wurzeln bedeutend ſind, und keine Modifikation verlangen.

38. Um ein anderes Beyſpiel zu geben, wollen wir annehmen, daſs die gegebene Gleichung ſich auf

eine Curve beziehe, deren Ordinate, als unbekannt betrachtet, durch $y$ vorgeſtellt ſey, und daſs für einen gewiſſen beſtimmten Werth der Abſciſſe es unter den Werthen von $y$ einen oder mehrere negative gebe.

Es folgt aus dem, was (37) geſagt iſt, daſs jede der poſitiven Wurzeln für $y$ einen Werth giebt, der unmittelbar den Bedingungen, durch welche die Natur der Curve beſtimmt iſt, Genüge leiſtet, eben ſo wie den Hypotheſen, auf welche die Betrachtung gebaut iſt. Z. B. wenn dieſe Betrachtung in der Vorausſetzung aufgeſtellt iſt, daſs die Ordinaten rechts von der Axe genommen würden, ſo giebt jede poſitive Wurzel wirklich einen Punkt der Curve rechts von der Axe, aber keine von den negativen Wurzeln kann derſelben Vorausſetzung entſprechen. Nun muſs man alſo, um zu erfahren, was dieſe negativen Wurzeln bedeuten, ihr Zeichen verändern, und dann ſehen, welche Modifikationen man mit dem Syſtem vornehmen muſs, auf das die Betrachtung gegründet iſt, damit die ſo geänderte Gleichung ihm Genüge leiſte, d. h. in dem neuen Syſteme die gegebenen Bedingungen ausdrücke, durch welche die Natur der Curve beſtimmt iſt.

Nun behaupte ich, daſs dieſs neue Syſtem, dem die ſo modificirte Gleichung entſpricht, nichts anders, als der Theil der Curve iſt, der an der andern Seite der Axe liegt, mit Hinſicht auf das Urſyſtem, d. h. mit Hinſicht auf den Theil der Curve, auf den die Betrachtung gegründet und die Gleichung gefunden iſt.

Denn indem man $y$ als unbekannt nimmt, ſo kann man eben ſo wie vorher beweiſen, daſs, wenn jede poſitive Wurzel von $y$ einen Punkt zur Rechten von der Axe der Abſciſſen bedeutet, jede negative Wurzel einen Punkt auf der andern Seite bedeuten muſs; woraus man ſieht, daſs bey derſelben Curve die Arme, die an den zwey verſchiedenen Seiten irgend einer Axe liegen, zwey indirekt correlative Syſteme bilden.

39. Aus ähnlichen Beyſpielen, die freylich häufig genug ſind, glaubte man allgemein ſchlieſsen zu können, daſs in der Geometrie die negativen Wurzeln immer wirkliche Quantitäten bedeuteten, die nur in entgegengeſetzter Richtung von den poſitiven Wurzeln genommen wären. Aber dieſer Schluſs ſcheint vielen Einſchränkungen unterworfen zu ſeyn; denn wenn das negative Zeichen, das die Wurzeln afficirt, wie man vorher geſehen hat, daher kommen kann, daſs die vorgelegte Frage unverträgliche Bedingungen in ſich faſst, oder daſs man die Betrachtungen auf Hypotheſen, die mit dieſen Bedingungen unverträglich ſind, gegründet hat; ſo kann es auch daher kommen, daſs die algebraiſchen Umformungen nichts bedeutende Wurzeln mit poſitiven amalgamirt haben, welches die einzigen ſind, die wirklich und ganz die Frage auflöſen; auch iſt es leicht, durch viele Beyſpiele darzuthun,

1) daſs ſich oft negative Wurzeln finden, die durchaus nichts bedeuten;
2) daſs ſelbſt, wenn ſie bedeutend ſind, ſie nicht

immer in entgegengeſetzter Richtung genommen werden müſſen.

So zum Beyſpiel iſt es deutlich, daſs ein Cirkel nicht zwey Halbmeſſer haben kann; wenn man aber die drey Seiten eines Dreyecks $a$, $b$, $c$ nennt, und dann den Halbmeſſer des umſchriebenen Cirkels ſucht, ſo erhält man

$$R = \frac{a\,b\,c}{\pm r(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4))}$$

was für $R$ zwey Werthe giebt, den einen poſitiv, den andern negativ, wenn man der Wurzelgröſse das doppelte Zeichen giebt. Aber ein Cirkel mit negativem Halbmeſſer iſt ungereimt, alſo bedeutet die zweyte Wurzel nichts.

Als zweytes Beyſpiel wollen wir folgende Frage aufſtellen: Wenn zwey Punkte $A$, $B$ auf der Peripherie eines Cirkels gegeben ſind, auf dieſer Peripherie einen dritten Punkt $K$ zu finden, deſſen jedesmalige Entfernungen $\overline{AK}$. $\overline{BK}$ von den zweyen Punkten $A$ und $B$ in gegebenen Verhältniſſen ſind. (*Fig.* 5.). Ich nehme $\overline{BK}$ als unbekannte an

$$= x$$

Das gegebene Verhältniſs $\frac{\overline{AK}}{\overline{BK}} = a$,

Die gegebene gerade Linie $\overline{AB} = b$.

Den bekannten Winkel $AKB = K$.

Nach den bekannten Eigenſchaften der Dreyecke werden wir $\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 - 2.\overline{AK}.\overline{BK}.\cos AKB$ haben, wo, weil $\overline{AK} = a.\overline{BK}$

$b^2 = a^2x^2 + x^2 - 2ax^2 \cos k$ hieraus zieht man

$$x = \frac{b}{\pm r(1 + a^2 - 2a\cos k)}$$

Hier ſind nun zwey algebraiſche Auflöſungen, d. h. zwey Wurzeln, die eine poſitiv, die andere negativ; über den Gebrauch der erſten kann gar keine Ungewiſsheit ſtatt finden, aber was bedeutet die negative Wurzel? Soll man vielleicht vom Punkte $B$, mit dem abſoluten Werth, der für $x$ gefunden iſt, einen Bogen $\overline{KR}$ beſchreiben, und werden die Punkte $K$ und $R$ die zwey Auflöſungen geben? Aber das iſt nicht der Fall, denn man ſieht leicht ein, daſs, wenn man zum Beyſpiel $\overline{AK} = 2 \cdot \overline{BK}$ annehme, d. h. $a = 2$, $K$ und $R$ nicht zugleich beyde dieſe Bedingungen erfüllen können; und noch mehr, daſs $\overline{BK}$ und $\overline{BR}$ ſich nicht in entgegengeſetzter Richtung finden würden, wie man annimmt, daſs es ſeyn ſoll. Aber von der andern Seite kann dieſe zweyte Wurzel nicht falſch ſeyn, weil ſie ſtrenge aus einer genau geſtellten Gleichung abgeleitet iſt, alſo iſt ſie bloſs unbedeutend.

Noch mehr, die Aufgabe hat in der That zwey wirkliche Auflöſungen, aber die oben gefundene negative Wurzel bezieht ſich auf keine von beyden, und um die zweyte zu finden, muſs man die Aufgabe in Gleichung ſetzen, indem man von einer neuen Hypotheſe ausgeht.

Wir nehmen an, daſs der Punkt $K$ auf dem Theile $AKB$ des Umkreiſes wäre, und die gefundene Auflöſung paſst zu dieſer Hypotheſe. Aber man hat gar keinen Grund anzunehmen, daſs der geſuchte Punkt eher auf dieſem, als auf dem andern Theile liege. Wir wollen jetzt annehmen, daſs der geſuchte Punkt in $K'$ liege. Da nun der Winkel $AK'B$ das

Supplement des gegebenen Winkels $k$ ist, so hat man $cos\, AK'B = -cos\, k$ und folglich wird die gefundene Gleichung für den gegenwärtigen Fall

$$x = \frac{b}{\pm r\,(1 + a^2 + 2a \,.\, cos\, a)}$$

Eine Gleichung, in welcher die zweyte Wurzel, nach den vorher gegebenen Gründen, blofs algebraisch und unbedeutend ist.

Die beyden wirklichen Auflösungen der Aufgabe lassen sich, wie man sieht, in diese Formel vereinigen

$$x = \frac{b}{r\,(1 + a^2 \pm 2a \,.\, cos\, k)}$$

die weder die eine, noch die andere der vorher gefundenen Gleichungen ist.

40. Wir haben eben gesehen, dafs, wenn eine Gleichung zwey Wurzeln hat, beyde deswegen nicht zwey wirkliche Auflösungen für die Frage geben. Dasselbe Beyspiel soll uns dienen, zu beweisen, dafs, wenn gleich eine Aufgabe zwey wirkliche Auflösungen zuläfst, man nicht daraus folgern kann, dafs die Endgleichung zwey Wurzeln habe, aber dafs man jede für sich durch eine Gleichung des ersten Grades finden kann. Dieſs hängt von einer passenden Wahl der Unbekannten ab.

Wir wollen den Perpendikel $\overline{KD}$ auf $\overline{AB}$ senken, als Unbekannte $\frac{\overline{AD}}{\overline{KD}}$ annehmen, und dieſs Verhältnifs $= z$ nennen. Das Dreyeck $AKB$ giebt uns

wenn man eine glückliche Wahl der Unbekannten trifft, denn wir werden sehen, dafs durch eine Gleichung des zweyten Grades man oft die Auflösung einer Frage erhält, die 4, 8, selbst 16 verschiedene wirkliche Auflösungen hat.

41. Ich schliefse hieraus, dafs man nie genau von der Zahl der wirklichen Auflösungen einer Aufgabe aus der Zahl der algebraischen positiven und negativen Wurzeln der Gleichung urtheilen kann, selbst wenn man ganz von den eingebildeten Wurzeln absieht; dafs die Zahl der algebraischen positiven und negativen Wurzeln gröfser seyn kann, als die Zahl der wirklichen Auflösungen, weil die verschiedenen Umformungen, die man mit der Gleichung vornehmen müfste, um sie rational zu machen, die bedeutungslosen Wurzeln mit den wirklichen haben verschmelzen können; und dafs die Zahl der wirklichen Auflösungen auch gröfser seyn kann, als die der algebraischen Wurzeln, weil die Gleichung sich in mehrere rationale Faktoren auflösen liefs, von denen einige sich nicht mehr in der Endgleichung finden. Also ist die Regel, die negativen Wurzeln in die entgegengesetzte Richtung von den positiven zu tragen, zum wenigsten sehr unbestimmt. Aber noch mehr, wir werden sehen, dafs sie falsch ist, und dafs selbst, wenn die negativen Wurzeln wirkliche Auflösungen anzeigen, sie doch nicht immer in entgegengesetzter Richtung von den positiven Wurzeln genommen werden müssen.

42. Die Aufgabe sey: wenn eine Sehne $\overline{BC}$ willkührlich in einem gegebenen Cirkel gezogen ist

(*Fig.* 4.). Durch den Punkt $A$, wo der Bogen $BAC$ von einem aus der Mitte von $\overline{BC}$ errichteten Perpendikel geſchnitten wird, eine neue Sehne $\overline{AK}$ ſo zu führen, daſs der Theil $\overline{HK}$, welcher zwiſchen der gegebenen Linie $\overline{BC}$ und dem Endpunkte $K$ der Sehne $\overline{AK}$ liegt, einer gegebenen Linie gleich ſey.

Ich nehme $\overline{AH}$ als Unbekannte an $= z$.

Die gegebene Sehne $\overline{BC}$ $= a$.

Die gegebene Linie $\overline{HK}$ $= b$.

Den bekannten Perpendikel $AF$ $= c$.

Durch die Eigenſchaft der Sehnen, die ſich in einem Cirkel ſchneiden, hat man

$\overline{HK}.\overline{AH}$ oder $bz = \overline{BH}.\overline{CH} = (\overline{BF} + \overline{FH}).(\overline{BF} - \overline{FH})$

$= \overline{BF}^2 - \overline{FH}^2 = \frac{1}{4}a^2 - \overline{FH}^2$.

Aber das rechtwinklichte Dreyeck $AFH$ giebt

$\overline{FH}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{AF}^2 = z^2 - c^2$

ſetzt man dieſen Werth von $\overline{FH}^2$ in die vorige Gleichung, ſo erhält man

$bz = \frac{1}{4}a^2 - z^2 + c^2$, woraus man erhält

$z = -\frac{1}{2}b \pm r(c^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2)$

was man finden ſollte.

Von dieſen beyden Wurzeln, wovon die eine poſitiv, die andere negativ iſt, entſpricht die erſte unmittelbar der aufgeſtellten Frage, und der Hypotheſe, auf welche die Betrachtung gegründet iſt; nämlich daſs $\overline{KH}$ auf der Fläche des Cirkels liegt; die zweyte entſpricht der Hypotheſe, wo $H$ auſserhalb $\overline{BC}$ auf ihre Verlängerung in $H'$ fällt. Da die Bedingung nämlich bloſs iſt, daſs der Theil zwiſchen $\overline{BC}$ und dem Umkreiſe $= b$ ſey, ſo kann man ihn auch auſserhalb, zwiſchen $K'$ und $H'$, eben ſo gut

wie inwendig zwiſchen $K$ und $H$ nehmen. Das iſt alſo die zweyte wirkliche Auflöſung, welche die negative Wurzel anzeigt. Nun ſind aber $\overline{AH}$ und $\overline{AH'}$ nicht in entgegengeſetzter Richtung. Alſo, wie ich vorher geſagt habe, die negativen Wurzeln, ſelbſt wenn ſie wirkliche Auflöſungen ausdrücken, finden ſich nicht immer in entgegengeſetzter Richtung von den poſitiven.

Dieſe Auflöſung beſtätigt, was ich vorher geſagt habe, nämlich daſs durch eine paſſende Wahl der Unbekannten man eine Endgleichung erhalten kann, die von geringerem Grade iſt, als die Zahl der Auflöſungen, deren die Aufgabe fähig iſt; denn im gegenwärtigen Fall, obgleich die Gleichung nur zum zweyten Grade ſteigt, hat die Aufgabe wirklich vier Auflöſungen, die zwey nämlich, die man rechts vom Punkte $F$ gefunden hat, und zwey ähnliche, die links liegen. Es iſt gar kein Grund da, indem die Figur ſymmetriſch iſt, warum die Punkte $H$, $H'$ eher zur Rechten als zur Linken von $F$ fallen ſollten.

Auch würde es leicht ſeyn, dieſe vier Auflöſungen durch eine und dieſelbe Gleichung vom vierten Grade zu erhalten, wenn man eine andere Unbekannte, z. B. $\overline{FI}$ annimmt $= y$. So giebt uns das rechtwinklichte Dreyeck $AFH$

$$\overline{FH}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{AF}^2 \text{ oder } y^2 - z^2 - c^2$$

oder $y = \pm r(z^2 - c^2)$ oder

$$y = \pm r[(-\tfrac{1}{2}b \pm r(c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2))^2 - c^2]$$

eine Gleichung, die die vier geſuchten Auflöſungen giebt, indem die poſitiven Wurzeln $\overline{FI}$ und $\overline{FH'}$

anzeigen, die negativen aber dieſelben Quantitäten in entgegengeſetzter Richtung genommen.

43. Aus allem, was geſagt iſt, ſieht man, daſs die gewöhnlich gegebene Regel für den Gebrauch der negativen Wurzeln in der Geometrie nicht genau iſt. Sie iſt es nur, wie ich es oben bewieſen habe (37), für einen ſehr allgemeinen Fall (vorausgeſetzt, wie man (61) ſehen wird, daſs keine eingebildeten unter dieſen Wurzeln ſind), den nämlich, wo die Frage, wie im Fall darauf, zurückkommt, den Theil $\overline{FH}$ einer geraden Linie $\overline{BC}$ zu finden, deren Lage beſtimmt iſt, indem man von einem gegebenen Punkte $F$ ausgeht; denn dann werden die poſitiven Wurzeln nach der Richtung $\overline{FH}$ getragen, der Hypotheſe gemäſs, auf welche die Betrachtung gegründet iſt; und die negativen Wurzeln nach der andern Seite. Dieſs macht auch, daſs bey den Curven, deren Gleichung das Verhältniſs der Abſciſſe zur Ordinate ausdrückt, welche beyderſeitig zweyen gegebenen Axen parallel ſind, dieſe Gleichung immer zu dem Grade ſteigt, der durch die Zahl der Durchſchnittspunkte der Curve mit jeder Abſciſſe oder jeder Ordinate beſtimmt iſt. Aber das würde nicht ſo ſtatt finden, und die Gleichung würde bald auf einen höhern, bald auf einen niedrigern Grad kommen, wenn man das Syſtem der Coordinaten veränderte, indem man aufhörte ſie beyderſeitig parallel mit zwey gegebenen Axen zu nehmen. Denn wenn man z. B. bey einem Kegelſchnitt die zwey *radii vectores* als Coordinaten annehme, ſo iſt die Gleichung nie vom erſten Grade,

und ſie ſteigt zum vierten, wenn ſtatt der Brennpunkte man z. B. den Scheitel der Curve nimmt.

Was (37) für die gerade Linie bewieſen iſt, iſt ſichtbar auf den Umkreis eines Cirkels und auf jede andere Curve anwendbar. Wenn die Gleichung, welche die Auflöſung einer Aufgabe giebt, einen negativen Bogen zur Wurzel hat, ſo muſs dieſer Bogen poſitiv auf der entgegengeſetzten Seite genommen werden, wenn ſonſt keine eingebildete Gröſsen in dieſer Wurzel ſind.

44. Daraus, daſs die Regel, die man gewöhnlich für den Gebrauch der negativen Wurzeln in der Geometrie aufſtellt, Ausnahmen leidet, folgt durchaus nicht, daſs dieſe Wurzeln als unnütz verworfen werden müſſen. Denn gleich im Anfang habe ich bewieſen (37), daſs die Regel ihre Anwendung findet, wenn die Frage darauf zurückgebracht iſt, die Entfernung eines geſuchten Punktes von einem andern gegebenen Punkte, der auf einer gegebenen Linie iſt, zu finden, wenn nur die Endgleichnng keine eingebildete Gröſsen enthält; und es iſt eben ſo evident, daſs daſſelbe immer ſtatt hat, ſo oft die Frage darauf zurückkommt, die Entfernung eines geſuchten Punktes von Axen oder ſonſtigen feſten Ebenen zu finden, welches der gewöhnlichſte Fall iſt. Noch mehr, obgleich die negativen und eingebildeten Wurzeln nur algebraiſche Formen ſind, an ſich unbedeutend, ſo haben wir doch geſehen, daſs ſie durch ihre Umformungen zu wirklichen Reſultaten führen können, und dabey bemerkt, daſs eben im Gebrauch dieſer algebraiſchen Formen in dieſer Beziehung die

Natur der Analyſis und ihr Vortheil vor der Syntheſis beſteht. Alles dieſs iſt der falſchen Anwendung, die man davon bey Auflöſung einiger beſondern Fragen der Geometrie machen könnte, vollkommen fremd. Doch zurück auf unſere allgemeine Unterſuchung.

45. Wir haben geſehen (37), wie es möglich iſt, daſs eine und dieſelbe Formel unmittelbar und ohne alle Modifikation zwey verſchiedenen Fragen entſpreche, die anders abgehandelt zwey beſondere Auflöſungen erfordert hätten. Eine und dieſelbe Formel kann eben ſo drey und mehr Fragen enthalten, und man könnte fragen, wie, wenn man die beſondere Formel hätte, die jeder Frage eigen wäre, man die allgemeine finden könne, die ſie alle umfaſste, d. h. die auf jede von ihnen unmittelbar und ohne Modifikationen anwendbar wäre. Man kann durch verſchiedene Mittel dazu kommen, und auf allgemeine Art würde man es erhalten, wenn man immer dieſe verſchiedenen partikulären Formeln auf ihren gemeinſchaftlichen Urſprung beziehen, d. h. wenn man aus dieſen Formeln die wechſelſeitig inverſen Quantitäten verbannen könnte, die ſie nicht zuſammen paſſend machen, indem man an ihre Stelle die direkten Quantitäten ſetzte, deren Differenzen ſie ſind (24).

In der That, weil die inverſe Quantität $p$ (24) nur durch die Subſtitution von $n-p$ ſtatt $m$ ins Syſtem gebracht iſt, ſo iſt es deutlich, daſs man auf die erſte Ordnung kommt (d. h. auf die Formel, die nicht inverſe Quantitäten ertheilt, und die folglich auf beyde Syſteme anwendbar war), wenn man $n-m$ ſtatt $p$ ſetzt, und wenn man daſſelbe für alle andere

Quantitäten thut, die wechſelſeitig invers zwiſchen den beyden Syſtemen ſind, ſo wird die Formel unmittelbar auf jedes von ihnen anwendbar, ohne irgend eine Veränderung der Zeichen, und wird folglich die allgemeine Formel ſeyn.

Z. B. im Dreyeck $ABCD$ (*Fig.* 1.), das ſchon oben angeführt iſt, hat man als Urſyſtem, d. h. wenn $D$ zwiſchen $B$ und $C$ fällt,

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD},$$

und als umgeformtes Syſtem, d. h. wenn $C$ zwiſchen $B$ und $D$ fällt,

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CD}.$$

Dieſe beyden Formeln ſind unterſchieden, weil im letzten Falle $\overline{CD}$ invers iſt, indem man $\overline{CD} = BD - \overline{BC}$ hat, ſtatt daſs man im erſten im Gegentheil $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{CD}$ hatte. Aber will man eine Formel finden, die unmittelbar anwendbar auf beyde Syſteme ſey, ſo braucht man nur die inverſe Quantität $\overline{CD}$ herauszuſchaffen, indem man ihren Werth in direkten Quantitäten unterſchiebt, der für das zweyte Syſtem, z. B. wie man eben geſehen hat,

$$\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{DC} \text{ iſt:}$$

woraus man

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD} - \overline{BC}^2$$

erhält, eine Gleichung, die ſtatt hat, mag der Punkt $C$ zwiſchen $B$ und $D$, oder der Punkt $D$ zwiſchen $B$ und $C$ fallen.

Aber wenn der Punkt $C$, nachdem er zwiſchen $B$ und $D$ gekommen iſt, ſeinen Weg fortſetzte, und über den Punkt $B$ hinausginge, ſo könnte ſich die Formel verändern, weil wir die aufgeſtellte Defini-

tion (24) verlaſſen würden, die annimmt, daſs die Quantitäten $M$, $N$ immer endlich bleiben, d. h. nicht, während der ganzen Veränderung des Syſtems, durch o oder durch $\infty$ gehen. Nun geht aber hier $\overline{BC}$ durch o in dem Augenblicke, wie $C$ in $B$ fällt. Dieſe Formel wird ſich in der That ändern, denn wenn wir als Maaſsſtab zur Vergleichung dieſs Syſtem nehmen, wenn $C$ zwiſchen $B$ und $D$ iſt, ſo hat man für daſſelbe Syſtem

$$\overline{BC} = \overline{BD} - \overline{CD}$$

ſtatt daſs, nachdem $C$ jenſeits $B$ gegangen iſt, man im Gegentheil

$$\overline{BC} = \overline{CD} - \overline{BD} \text{ hat.}$$

Alſo iſt $\overline{BC}$ invers, alſo muſs man $-\overline{BC}$ an die Stelle von $\overline{BC}$ ſetzen, um die vorhergehende Formel unmittelbar auf den letzten Fall anwendbar zu machen. Alſo wird die Formel

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = BC^2 + 2\overline{BC} \cdot \overline{BD}.$$

Eben ſo ſey $AMBM'$ (*Fig.* 5.) eine Curve auf die Axe $AB$ bezogen; wir haben geſehen, daſs die Arme $AMB$, $AM'B$, die an den beyden Seiten der Axe liegen, zwey indirekt correlative Syſteme bilden, in welchen die ſich entſprechenden Ordinaten $\overline{FM}$, $\overline{FM'}$ in Rückſicht auf einander invers ſind, und in der That, wenn man auf der Verlängerung von $\overline{MM'}$ willkührlich einen feſten Punkt $K$ annimmt, ſo erhält man

$$\overline{FM} = \overline{KM} - \overline{KF},$$

und im Gegentheil

$$\overline{FM} = \overline{FK} - \overline{KM'}:$$

aber ſollen dieſe wechſelſeitig inverſen Quantitäten

verſchwinden, um eine Gleichung zu erhalten, die die beyden Punkte $M$, $M'$ ohne Veränderung der Zeichen giebt, ſo braucht man nur, wenn man

$$\overline{FM} = y$$
$$\overline{KM} = z$$

die Beſtändige $\overline{KF} = a$ nimmt,

in die Gleichung für den Punkt $M$ auf die Axe $\overline{AB}$ bezogen, $z - a$ ſtatt $y$ zu ſetzen. Die Gleichung in $z$ wird dann ohne irgend eine Veränderung der Zeichen ſowohl dem Punkte $M'$ als dem Punkte $M$ gehören.

46. Weil die Formeln, die zwey indirekt correlativen Syſtemen eigen ſind, ſich nur durch die Zeichen der Quantitäten, aus denen dieſe Syſteme beſtehen, unterſcheiden, ſo folgt, daſs, wenn dieſe Formeln nur dieſe Quantitäten ſelbſt zum Quadrat erhoben enthalten, die dem einen eigenen Formeln unmittelbar auf das andere anwendbar ſind; man braucht nur das Zeichen der Quantitäten, die in dieſem invers ſind, zu verändern, aber die Veränderung des Zeichens der einfachen Gröſse verändert nicht das Zeichen ihres Quadrats. Die Formel bleibt alſo dieſelbe, d. h. ſie iſt ſo gut auf das umgeformte als auf das Urſyſtem unmittelbar anwendbar. So gehört die Gleichung

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2$$

dem vorher betrachteten Dreyeck, es mag nun $D$ zwiſchen $B$ und $C$, oder $C$ zwiſchen $B$ und $D$, oder endlich $B$ zwiſchen $C$ und $D$ fallen.

47. Endlich jede Formel des Urſyſtems, die nur zwey Ausdrücke hat, iſt auch auf jedes der Syſteme anwendbar, die ihm direkt oder indirekt correlativ

ſind. In der That, wenn ſie es nicht wäre, müſste man, um ſie dahin zu bringen, das Zeichen der Quantitäten, die invers würden, verändern; aber die Formel würde ſich deswegen nicht verändern, weil, wenn einer der Ausdrücke negativ wird, der andere es auch werden muſs; denn ein poſitiver Werth kann nie einem negativen gleich ſeyn.

Z. B. wenn zwey gerade Linien $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ ſich in einem Cirkel im Punkte $K$ ſchneiden (*Fig.* 6.), ſo hat man, wie man weiſs, die Gleichung

$$\overline{AK} \,.\, \overline{DK} = \overline{BK} \,.\, \overline{CK},$$

welche immer zwey Ausdrücke hat.

Wir wollen jetzt annehmen, daſs das Syſtem durch unmerkliche Grade ſich ſo verändere, daſs der Durchſchnittspunkt $K$ auſserhalb der Fläche des Cirkels komme, und auf die Art das Syſtem ſo werde, wie es (*Fig.* 7.) vorgeſtellt iſt; dann hat man eben ſo im umgeformten Syſtem

$$\overline{AK} \,.\, \overline{DK} = \overline{BK} \,.\, \overline{CK}.$$

Dennoch iſt $\overline{CK}$ invers geworden, denn im erſten Syſtem hat man

$$\overline{CK} = \overline{CB} - \overline{BK}$$

und im zweyten im Gegentheil

$$\overline{CK} = \overline{BK} - \overline{CB},$$

folglich muſs $\overline{CK}$ das Zeichen wechſeln. Da aber von der andern Seite $\overline{DK}$ auch invers wird, weil man im erſten Fall

$$\overline{DK} = \overline{AD} - \overline{AK}$$

und im zweyten

$$\overline{DK} = \overline{AK} - \overline{AD}$$

hat; ſo folgt, daſs $\overline{DK}$ auch das Zeichen wechſeln

muſs, und daſs folglich die Endgleichung dieſelbe ſeyn muſs, wie damals, da der Durchſchnittspunkt $K$ innerhalb des Cirkels war.

48. Nach dem, was (24) geſagt iſt, um zu beurtheilen, ob eine Quantität während der Veränderung des Syſtems direkt bleibt, oder invers wird, müſſen die beyden Quantitäten $M$, $N$, deren Differenz ſie iſt, während dieſer Veränderung endlich bleiben, d. h. weder durch o noch durch $\infty$ gehen.

Wir wollen $M > N$ annehmen, und es ſey $M - N = P$; wir wollen ferner uns vorſtellen, daſs das Syſtem ſich verändere, ohne daſs $M$ oder $N$ durch o oder durch $\infty$ gehen, und daſs $M$, $m$ werde; $N$, $n$; $P$, $p$, indem wir nur immer die abſoluten Werthe dieſer Quantitäten betrachten.

Noch mehr, wir wollen annehmen, daſs für dieſe Veränderung, $M$ und $N$, die erſtere durch Abnehmen, die andere durch Wachſen angefangen haben, ſich eine der andern zu nähern bis zum Gleichwerden, daſs folglich ihr Unterſchied $P = 0$; daſs nachher, indem dieſe beyden Quantitäten fortfahren, die erſte abzunehmen, die andere zu wachſen, dieſe letzte, wenn ſie $n$ geworden iſt, gröſser als $m$ ſey (der Werth, den man vorausſetzt, daſs die andere ihn in derſelben Zeit angenommen habe), ſo wird ihr Unterſchied $p$, der im Urſyſtem $P$ war, invers geworden ſeyn, und man hat folglich $p = n - m$ für $P = M - N$, was im Urſyſtem ſtatt hat.

Alſo wenn eine Quantität auf dieſe Art invers wird, ſo müſſen nothwendig die beyden Quantitäten,

deren Differenz sie ist, durch das Verhältniss der Gleichheit gegangen seyn, und sie selbst durch o.

49. Aber die Quantität $p$ kann auch auf eine andere, als die angezeigte Art, invers werden; wenn sie nämlich, statt durch o zu gehen, durch $\infty$ geht; dann können die beyden Quantitäten, deren Unterschied sie ist, auch als durch das Verhältniss der Gleichheit gegangen betrachtet werden, aber indem sie beyde unendlich werden.

In der That, ich behaupte, dass, wenn $p$ invers geworden, $\frac{1}{p}$ es auch geworden ist. Eben so deutlich wird in dem Augenblicke, wo $p = o$, $\frac{1}{p} = \infty$. Man muss also beweisen, dass, wenn $M$, $m$ und $N$, $n$ geworden ist, $\frac{1}{p}$ eben so gut wie $p$ invers wird.

Weil man $p = n - m$ hat, so hat man auch $\frac{1}{p} = \frac{1}{n-m} = \frac{n-m}{(n-m)^2} = \frac{n}{m^2 + n^2 - 2mn} - \frac{m}{m^2 + n^2 - 2mn}$, also (25) die Urgleichung, welcher diese entspricht, muss so seyn, dass, wenn man in ihr für diese Quantitäten die ihnen entsprechenden setzt, und das Zeichen derer, die invers werden konnten, verändert, sie mit der vorhergehenden übereinstimmt. Aber nach der Hypothese sind $m$ und $n$ nicht durch o oder durch $\infty$ gegangen, also direkt geblieben, und brauchen die Zeichen nicht zu ändern. $p$ im Gegentheil ist nach der Hypothese invers gewor-

den, ſein Zeichen muſs ſich alſo verändert haben. Alſo müſste die Urgleichung

$$\frac{1}{P} = \frac{M}{M^2 + N^2 - 2MN} - \frac{N}{M^2 + N^2 - 2MN}$$

ſeyn; alſo iſt $\frac{1}{p}$ im neuen Syſteme die Differenz zweyer Quantitäten $\frac{n}{m^2+n^2-2mn}$, $\frac{m}{m^2+n^2-2mn}$, die ihre Ordnung verändert haben, d. h. deren kleinere im Urſyſteme die gröſsere iſt, und umgekehrt. Alſo iſt $\frac{1}{p}$ invers geworden, d. h. überhaupt, wenn irgend eine Quantität invers wird, ſo wird die Einheit, durch dieſe Quantität ſelbſt getheilt, auch eine inverſe Quantität.

50. So ſieht man, daſs eine Quantität auf zwey verſchiedene Arten invers werden kann, indem ſie entweder durch 0, oder durch $\infty$ geht. Aber man darf nicht ſchlieſsen, daſs, umgekehrt, jede Veränderliche, die durch 0 oder durch $\infty$ geht, deswegen nothwendigerweiſe invers wird; denn z. B. nimmt man an, daſs $p$ invers wird, ſo wird $p^2$ es darum nicht, ob es gleich augenſcheinlich mit $p$ zugleich durch 0 oder durch $\infty$ gegangen iſt. In der That, wenn $p^2$ invers würde, würde es auch das Zeichen verändern, das geſchieht aber nicht, wenn $p$ es auch verändert, weil $(-p)^2$ immer $p^2$ iſt. Alſo hat dieſe Quantität $p^2$ bey'm Durchgang durch 0 oder durch $\infty$ nicht das Zeichen verändert, und iſt alſo auch nicht invers geworden.

51. Was die beſtändigen Gröſsen anbetrifft, d. h. diejenigen, die während der ganzen Veränderung

dieſelben bleiben, ſo kann man ſie betrachten, als wenn ſie einen Theil von jedem der correlativen Syſteme insbeſondere ausmachten; und weil ſie weder durch o noch durch ∞ gehen können, ſo iſt ihr Zeichen der Correlation mit dem Urſyſtem immer +.

52. Die Quantitäten, die das Urſyſtem ausmachen, ſind nur abſolute Quantitäten, und die Zeichen, die in den Ausdruck ihrer Verhältniſſe kommen, dienen nur immer ausführbare Verrichtungen anzuzeigen; alſo haben dieſe Quantitäten, um eigentlich zu reden, keine Zeichen der Correlation. Doch weil unter allen Syſtemen, die mit dieſem Urſyſtem in direkter Correlation ſtehen, das erſte in der Ordnung dieſs Urſyſtem ſelbſt iſt, ſo kann man jede der Quantitäten, die es ausmachen, als in direkter Correlation anſehen, und ihr folglich + als Zeichen der Correlation geben. So werde ich gewöhnlich verfahren.

53. Wenn man alle Syſteme, die unter einander correlativ ſind, als verſchiedene Zuſtände des Urſyſtems anſieht, das durch unmerkbare Stufen ſich verändert, ſo kann man die für dieſs Urſyſtem gefundenen Formeln als allen andern gehörig betrachten, indem man annimmt, daſs dann die zu ihnen gehörigen Quantitäten nicht mehr die Urquantitäten vorſtellen, ſondern daſs ſie nur in ihnen die correlativen Werthe ausdrücken, die ſie in dem Syſtem haben, auf das man ſie anwenden will. In dieſer Hinſicht werden dieſe Formeln allgemein; aber dann kann die Anwendung auf jeden einzelnen Fall nicht wirklich ausgeführt werden, als wenn man dieſe Subſtitution des

correlativen Werths für die abſolute im Urſyſtem entſprechende Quantität bewirkt. Man muſs alſo in jeder allgemeinen Formel die Buchſtaben oder ſonſtige Charaktere, die gebraucht ſind, um die Quantitäten auszudrücken, nicht als die Quantitäten ſelbſt, auf welche die Betrachtung gegründet iſt, betrachten, ſondern als die correlativen Werthe derjenigen, die ihnen im beſondern Syſtem, auf das man die Anwendung der Formeln machen will, entſprechen.

54. Was ich bisher geſagt habe, betrifft nur den Fall, wo man annimmt, daſs die Umformung des Syſtems keine gröſsere Veränderung in den Zeichen der Formeln erfordert, die in der allgemeinen Tafel enthalten ſind, als die Verwandlung von + in — für die einfachen Quantitäten, die zur Zuſammenſetzung des Syſtems gehören. Jetzt wollen wir ſehen, was eintreten würde, wenn die Umformung ſo weit getrieben wäre, daſs, um die Formeln der allgemeinen Tafel mit dem neuen Zuſtande des Syſtems übereinſtimmend zu machen, man das Zeichen einer oder mehrerer dieſer Quantitäten eingebildet machen müſste.

Wir haben geſehen (24), daſs, wenn wir die Urquantitäten $M$, $N$ in den Formeln laſſen, ſie ohne eine Veränderung der Zeichen auf alle mögliche Syſteme anwendbar bleiben, $M$ mag gröſser als $N$ ſeyn oder kleiner werden. Wir haben ferner geſehen, daſs, wenn wir ihren Unterſchied $P$ nennen, die Formeln, ſo lange $M$ gröſser als $N$ bleibt, auch ohne eine Veränderung der Zeichen auf das umgeformte Syſtem anwendbar bleiben, aber daſs von dem Augenblicke,

wo $M$ kleiner als $N$ wird, oder dieſe Quantitäten zur inverſen Ordnung übergehen, man das Zeichen dieſer Differenz $P$ verändern muſs, um die Formeln fortdauernd anwendbar auf das umgeformte Syſtem zu behalten.

Alſo wenn, ſtatt $M-N=P$, wir $M-N=P^2$ geſetzt hätten, ſo müſste man das Zeichen von $P^2$ verändern, um die Formeln des Urſyſtems für das umgeformte paſſend zu machen, d. h. man müſste in den Formeln des Urſyſtems $-P^2$ ſtatt $+P^2$ ſetzen. Aber $-P^2$ ſtatt $+P^2$ zu ſetzen, iſt eben ſo viel als $P.\sqrt{-1}$ ſtatt $P$ oder $P.\sqrt{+1}$ zu ſetzen; alſo um die nöthige Veränderung zu bewirken, iſt es genug, $P$ den Coefficienten oder vielmehr das Zeichen (6) $\sqrt{-1}$, ſtatt des Zeichens $\sqrt{+1}$, oder den natürlichen Coefficienten 1 zu geben; d. h. um dann die Correlation der Zeichen herzuſtellen, muſs man nicht mehr das Zeichen — als Zeichen der Correlation, der abſoluten Quantität $P$ brauchen, ſondern das eingebildete Zeichen $\sqrt{-1}$.

Eben ſo hätte man $M-N=P^3$ ſetzen können; dann wäre $P^3$ in den Formeln des umgeformten Syſtems invers geworden, und man hätte ſein Zeichen von + in − im Urſyſteme verändern müſſen, um deſſen Formeln auf das umgeformte anwendbar zu machen. Da nun $-P^3$ eben ſo viel iſt als $(-P)^3$ oder $\left(\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}P\right)^3$, ſo folgt, daſs, um die Formeln des Urſyſtems paſſend auf das umgeformte zu machen, man nur ſtatt des Zeichens + des abſoluten

Werthes

Werthes $P$ eins von diesen drey Zeichen zu setzen braucht:

$$-1, \quad \frac{1+r-3}{2}, \quad \frac{1-r-3}{2},$$

welches die drey cubischen Wurzeln der Einheit negativ genommen sind.

Man sieht leicht, was zu thun wäre, wenn man $M-N=P^4$, oder $M-N=P^5$ u. s. w. machte, und dass folglich, um die Formeln des Ursystems auf das umgeformte System anwendbar zu machen, man genöthigt werden kann, das Zeichen einiger oder aller Quantitäten, nicht von $+$ in $-$, sondern von $+$ in $r-1$ oder ein anderes eingebildetes Zeichen zu verändern.

55. Man kann die Umformung noch weiter treiben; denn, statt $M-N=P$, oder $P^2$, oder $P^3$ u. s. w. anzunehmen, kann man es z. B. $=P-Q$, oder $P-Q^2$, oder $P-Q^2+R^2$ u. s. w. setzen. Aus diesen Substitutionen für $M-N$ im Ursystem würden für das umgeformte System, wenn $M=N$, zahlreiche Veränderungen der Zeichen entstehen; denn dann wären es die Zeichen der Funktionen $(P-Q)$, $(P-Q^2)$ u. s. w., die man negativ machen müsste, d. h. man müsste nicht mehr die Zeichen einfacher Quantitäten im Ursystem von $+$ in $-$ verändern, um die Correlation festzustellen, oder um die Formeln dieses Ursystems identisch mit denen für das umgeformte zu machen, auch nicht die Zeichen irgend einer Potenz dieser Quantitäten, sondern man müsste so die Zeichen irgend einer mehr oder weniger zusammengesetzten Funktion dieser Quantitäten verän-

dem, indem man ſie entweder allein nähme, oder unter einander verbände. Deswegen nenne ich dieſe Gattung der Correlation complexe Correlation.

56. Ohnerachtet aller dieſer Subſtitutionen bleiben die Formeln des veränderlichen Syſtems, in ſeinen verſchiedenen Zuſtänden betrachtet, doch immer dieſelben bis auf die Zeichen, die für jede der Quantitäten bald negativ, bald eingebildet von höherm oder niedrigerm Grade werden; und da es leicht zu ſehen iſt, daſs durch eine Reihe von Umformungen man nicht allein die Wurzelzeichen einer Formel oder Gleichung, ſondern auch alle negativen Ausdrücke verſchwinden laſſen kann, ſo folgt, daſs alle ſich entſprechende Formeln mehrerer correlativen Syſteme (ſey dieſe Correlation direkt, indirekt, eingebildet oder complex) auf eine und dieſelbe Formel zurückgeführt werden können, welche allen Syſtemen gehört, und die ihre gemeinſchaftlichen Eigenſchaften ausdrücken wird.

Daher folgt auch, daſs, wenn man Formeln hat, die auf irgend ein Syſtem von Quantitäten anwendbar ſind, man Formeln für alle möglichen correlativen Syſteme erhalten kann, indem man die Zeichen der dahin gehörigen Quantitäten auf alle mögliche Art verändert, wo man unter dem Namen Zeichen alle möglichen theils wirklichen, theils eingebildeten Wurzeln der Einheit umfaſst.

57. Nach dem, was vorher (54) geſagt iſt, ſieht man, daſs die eingebildeten Wurzeln einer Gleichung noch weit mehr entfernt ſind, die wahre Auflöſung

irgend einer Aufgabe zu geben, als die blofs negativen Wurzeln; und dafs ſie noch härtere Unverträglichkeiten zwiſchen den vorgeſetzten Bedingungen und den Hypotheſen, auf welche die Betrachtung gegründet iſt, ankündigen. Aber verändert man das Zeichen der negativen Wurzeln, und nimmt mit den gegebenen Gröſsen der Aufgabe oder den Hypotheſen, auf welche man die Betrachtung gründete, Modifikationen vor, welche dieſe Gegebenen und dieſe Hypotheſen mit den in ihren Zeichen ſo veränderten Gleichungen in Uebereinſtimmung bringen; nimmt man ferner zugleich, wenn man dieſs bey den Gegebenen und den Hypotheſen thut, auf denen die Anſetzung der Gleichung beruhte, mehr oder minder merkbare Modifikationen, mit den Zeichen, die in die eingebildeten Wurzeln der Unbekannten gehören, vor, ſo kann man dadurch die einen unmittelbar anwendbar auf die andern machen. Der Unterſchied beſteht nur darin, dafs die Modifikationen beträchtlicher werden, und dafs die Analogie des correlativem Syſtems mit dem Urſyſtem gewöhnlich ſchwerer aufzufaſſen iſt.

58. Wir wollen als ein Beyſpiel dieſe Frage aufſtellen: eine gerade Linie $\overline{AB}$ iſt gegeben (*Fig.* 8.), auf dieſer geraden Linie einen Punkt $K$ zu finden, ſo dafs das Produkt der beyden Segmente $\overline{AK}$, $\overline{BK}$ einer gegebenen Quantität gleich ſey: z. B. $= \frac{1}{2}\overline{AB}^2$.

Da ich noch nicht weifs, ob der Punkt $K$ ſich auf der geraden Linie $\overline{AB}$ ſelbſt oder auf ihrer Verlängerung finden ſoll, ſo fange ich erſt meine Rechnung unter der Vorausſetzung an, dafs er ſich auf ihr befinde, d. h. dafs $K$ zwiſchen $A$ und $B$ falle.

Dieſs feſtgeſetzt nehme ich $\overline{AK}$ als die Unbekannte $= x$, die Linie $AB = a$. Die Bedingungen der Aufgabe geben mir dann

$x(a - x) = \frac{1}{2}a^2$ oder

$x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 = 0$, woraus ich

$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{1}{4}a^2}$ ziehe, d. h. $x$ iſt eingebildet.

Daraus ſchlieſse ich nicht, daſs die Auflöſung der aufgeſtellten Aufgabe unmöglich ſey, ſondern bloſs, daſs ſie es nach der Vorausſetzung iſt, die ich gemacht habe, nämlich daſs der Punkt $K$ zwiſchen $A$ und $B$ liege, d. h. die Aufgabe kann nicht richtig in Gleichung geſetzt ſeyn, weil ich meine Betrachtungen auf Figuren gegründet habe, die nicht die waren, die ich betrachten ſollte, oder die nicht den Bedingungen der Aufgabe Genüge leiſten konnten. Ich fange alſo von neuem meine Betrachtungen an, indem ich von einer andern Hypotheſe ausgehe, d. h. ich nehme den geſuchten Punkt nicht auf $\overline{AB}$, wie ich vorher that, ſondern auf einer von ihren Verlängerungen, z. B. in $K'$.

Dann giebt die Bedingung der Aufgabe mir

$x \cdot (x - a) = \frac{1}{2}a^2$ oder

$x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2 = 0$, woraus ich

$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$ ziehe,

eine Gleichung, die, weil ſie keine eingebildete Quantitäten mehr enthält, die Frage auflöſt.

Dieſe Auflöſung iſt doppelt; die eine

$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$

iſt poſitiv, und löſt ohne Schwierigkeit die Aufgabe nach meiner neuen Hypotheſe auf, d. h. wenn man

annimmt, dafs der gefuchte Punkt auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ jenfeits des Punktes $B$ ift, oder dafs der Punkt $B$ fich zwifchen $A$ und dem gefuchten Punkte befindet. Aber die andere Auflöfung

$$x = \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2}$$

kann fich als negativ nicht auf diefelbe Hypothefe beziehen, und nach dem, was (37) gefagt ift, mufs man, um zu erfahren, was fie bedeutet, ihr Zeichen verändern, und fehen, welchem correlativen Syfteme die fo modificirte Gleichung Genüge leiften könne. Das Refultat diefer Veränderung ift, dafs die Gleichung $x(x-a) = \frac{1}{2}a^2$, welche die Bedingung der Aufgabe ausdrückt,

$$x \cdot (x+a) = \tfrac{1}{2}a^2$$

wird. Wir wollen alfo fehen, welchem neuen correlativen Syfteme diefer neue Ausdruck der Bedingungen der Aufgabe Genüge leiften kann.

Diefs gefchieht nun, wie man leicht fieht, wenn man annimmt, dafs der Punkt $K$ auf die Verlängerung von $AB$ nicht wie vorher auf die Seite von $B$, fondern auf die Seite von $A$ in $K$ falle. Und wirklich, geht man von diefer neuen Hypothefe aus, fo ift

$$x = \overline{AK}''$$
$$x + a = \overline{BK}''.$$

Daraus folgt, dafs die Bedingung der Aufgabe $x \cdot (x+a) = \frac{1}{2}a^2$ ift, welche Gleichung

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{2}{4}a^2}$$

geben wird, deren pofitive Wurzel in der That diefelbe ift, die fich bey der vorigen Hypothefe negativ dargeftellt hatte.

59. Man ſieht, daſs das eingebildete Zeichen, welches die Wurzel der Gleichung afficirt, eben ſo wenig, wie das bloſs negative Zeichen, eine Unmöglichkeit, die Aufgabe aufzulöſen, ankündigt, ſondern nur auf eine Unmöglichkeit hinzeigt, die Bedingungen dieſer Aufgabe mit den Hypotheſen, auf welche die Betrachtung gegründet iſt, zu vereinigen, und daſs es in beyden Fällen, nur auf eine Art, die leichter oder ſchwieriger aufzufaſſen iſt, die Modifikationen anzeigt, die man mit der einen oder der andern vornehmen muſs, um die Auflöſung möglich zu machen. Die Gleichung iſt die genaue Ueberſetzung der aufgeſtellten Bedingungen, vereinigt mit den Hypotheſen, auf welche man die Betrachtung gegründet hat; ſie wird ungereimt, ſo wie dieſe nicht vereinigt werden können, und dann muſs man nothwendigerweiſe die Vorausſetzungen modificiren, von denen man ausging, um zu einer wirklichen Auflöſung zu kommen. Dieſe Modifikationen zeigen ſich in der Gleichung, welche, da ſie die Ueberſetzung von Verhältniſſen wird, zwiſchen denen keine Unverträglichkeit mehr beſteht, ſelbſt nur mögliche Reſultate, wirkliche Quantitäten und ausführbare Verrichtungen anzeigt.

Es iſt auch möglich, daſs die aufgeſtellten Bedingungen in ſich ſelbſt unmöglich ſind, daſs ſie Widerſprüche einſchlieſsen, denn von welcher Hypotheſe man auch ausgeht, kommt man ſtets auf ungereimte Reſultate. Aber die Natur ſelbſt der Zeichen, ſie mögen negativ oder eingebildet ſeyn, die in dieſs Reſultat kommen, zeigen die Modifikationen an, die

man mit diesen Bedingungen selbst vornehmen muss, um die Aufgabe möglich zu machen.

Da die Unverträglichkeit der aufgestellten Bedingungen unter sich oder auf den Hypothesen, auf welche man die Betrachtung gründet, das ist, was die Auflösung einer Aufgabe unmöglich macht, so begreift man leicht, dass die Aufgabe dann zu bestimmt wird, und dass sich Bedingungen finden, die, da sie mit den andern unverträglich sind, durch ihre Unterdrückung die Aufgabe möglich machen würden. Ich will so viel sagen, man hat die Rechnung auf zu beschränkten Grundlagen geführt, und man muss die Frage, so wie sie aufgelöst worden ist, nur als eine theilweise Frage betrachten, deren wirkliche und positive Wurzeln blos die wahre Auflösung geben, aber deren negative und eingebildete Wurzeln andere theilweise Fragen anzeigen, die mehr oder minder Analogie mit der ersten haben. Diese könnten mit jenen in einen allgemeinen Ausdruck vereinigt werden, auf der die Gleichung, die man dann fände, stets unmittelbar anwendbar seyn würde, und ohne einige Modifikationen in den Zeichen. Dies hat man schon (37) für den Fall gesehen, wenn die Wurzeln blos negativ sind, und das kann man für eingebildete Wurzeln an dem eben gegebenen Beyspiel sehen.

In der That, die Aufgabe ist gleich anfangs unter der Hypothese in Gleichung gesetzt, dass der gesuchte Punkt $K$ zwischen $A$ und $B$ liege; da diese Hypothese nun mit den Bedingungen der Aufgabe unverträglich ist, so fand man natürlicherweise die Wurzeln ungereimt. Aber nach der Form dieser Wurzeln

konnte man die Modifikation beurtheilen, die man mit dieſer Hypotheſe vornehmen muſste; folglich ward ſie in der That modificirt, indem man annahm, daſs der geſuchte Punkt ſich rechts vom Punkte *B* finden müſſe. Da dieſe meine Vorausſetzung mit den Bedingungen übereinſtimmen konnte, ſo muſste man eine mögliche Auflöſung finden, d. h. eine wirkliche und poſitive Wurzel für die Unbekannte, und dieſe fand man. Aber zugleich war eine zweyte ungereimte Wurzel da, und dieſe zeigte uns, daſs die Hypotheſe, von der man zuletzt ausging, wenn gleich richtig, doch zu eingeſchränkt war, um den aufgeſtellten Bedingungen in ihrem ganzen Umfange Genüge zu leiſten, und zugleich gab ſie durch ihre Form die neue Modifikation zu erkennen, deren ſie fähig war. Dieſe Modifikation beſtand darin, den geſuchten Punkt bereits von *A* anzunehmen, und dieſe letzte Vorausſetzung gab in der That eine neue Auflöſung.

Man hätte alſo zugleich beyde Auflöſungen haben können, deren die Aufgabe fähig war, wenn man die Rechnung auf eine allgemeinere Hypotheſe gegründet hätte.

Statt als Unbekannte $x$ die Entfernung des Punktes *A* vom geſuchten Punkte zu nehmen, wollen wir in *F* einen neuen Punkt annehmen, der von *A* um die willkührliche Quantität $g$ entfernt iſt, die aber doch gröſser als der vorher gefundene Werth für $\overline{AK}''$ ſeyn muſs, die neue Unbekannte ſey die Entfernung des Punktes *F* vom geſuchten Punkte. Hier iſt es deutlich, daſs, wenn man die neue Un-

bekannte $y$ nennt, man für den Punkt $K'$, der die erſte Auflöſung giebt, $x = y - g$ haben wird; alſo braucht man nur dieſen Werth von $x$ in die vorher gefundene Gleichung zu ſetzen (58), um die zu erhalten, die $\overline{FK'}$ oder $y$ giebt. Nun wird die Gleichung ſo

$$y - g = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} \text{ oder}$$
$$y = g + \tfrac{1}{2}a\,(1 \pm \sqrt{3}).$$

$\overline{FK'}$ iſt alſo eine von den beyden Wurzeln. Aber da $K''$ ſich nach der Hypotheſe eben ſowohl rechts von $F$ befindet als $K'$, ſo iſt gar kein Grund vorhanden, warum mir die Gleichung eher eine von den Auflöſungen geben ſollte, deren die Aufgabe fähig iſt, als die andere. Weil die Betrachtungen, um die Gleichung zu finden, in beyden Fällen durchaus dieſelben ſeyn müſſen; alſo iſt die zweyte Wurzel $\overline{FK''}$; alſo giebt dieſelbe Hypotheſe mir dann die beyden geſuchten Auflöſungen, weil ich ihr eine hinreichende Ausdehnung gegeben habe, um in den beyden Fällen den aufgeſtellten Bedingungen zu entſprechen.

Ich wäre zu demſelben Reſultat gekommen, wenn ich ſtatt $\overline{FK'}$, $\overline{FK''}$ geſucht hätte; denn, wenn ich, wie im erſten Fall, $y$ die Entfernung des feſten Punktes $F$ vom geſuchten Punkte, und $x$ die Entfernung des Punktes $A$ von eben demſelben Punkte nenne, ſo würde man

$$x = g - y$$

haben, was in die Gleichung $x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2}$ geſetzt, die dem Fall entſpricht, wenn man den geſuchten Punkt links von $A$ annimmt,

$g - y = -\frac{1}{2}a \pm \frac{3}{4}a^2$ giebt, oder

$y = g + \frac{1}{2}a\,(1 \pm \sqrt{3})$ wie vorher.

60. Das vorige Beyſpiel zeigt, was den Unterſchied zwiſchen poſitiven, negativen und eingebildeten Wurzeln ausmacht. Die erſten allein löſen die Frage unmittelbar auf, ohne daſs man einige Modifikation, weder mit den Bedingungen der Aufgabe, noch mit den Hypotheſen, auf welche die Betrachtung gegründet iſt, noch mit den Gleichungen, die zugleich Bedingungen und Hypotheſen ausdrücken, vorzunehmen habe. Damit die zweyten die Frage auflöſen, muſs man ihr Zeichen verändern und zu gleicher Zeit theils mit den Bedingungen, theils mit den Hypotheſen, auf welche das Raiſonnement gegründet iſt, paſſende Modifikationen vornehmen; ſo, daſs die ſo modificirten Gleichungen hievon die genaue Ueberſetzung ſeyen. Endlich damit die eingebildeten Wurzeln auch die Frage auflöſen, iſt es nicht hinreichend, das Zeichen der Unbekannten von + in — in der Gleichung zu verändern, ſondern man muſs es von + in ein eingebildetes Zeichen verändern, und dann ſuchen, welches neue Syſtem dieſer Verwandelung entſprechen könne. Oder vielmehr man muſs nicht hier das Zeichen der Unbekannten ſelbſt verändern, ſondern das Zeichen einer Potenz oder einer mehr oder minder zuſammengeſetzten Funktion eben dieſer Unbekannten.

In dem vorher behandelten Fall z. B. iſt es nicht $x$, ſondern $x^2$, was das Zeichen verändern muſs, damit die Gleichung

$$x \cdot (x + a) = \tfrac{1}{2}a^2$$

werde, wie ſie ſeyn muſs, um die zweyte Auflöſung zu erhalten, ſtatt

$$x \cdot (a - x) = \tfrac{1}{2} a^2$$

wie man erſt annahm. Iſt dieſe Veränderung gemacht, ſo muſs man die Modifikation ſuchen, welche man zu gleicher Zeit mit dem Syſteme, auf dem die Betrachtung erſt beruhte, vorzunehmen hat, damit es zu dieſer Veränderung der Gleichung paſſe. Dieſe Modifikation beſteht nun darin, den geſuchten Punkt links von $A$ anzunehmen. Für die erſte Auflöſung muſs man weder von $x$, noch von ſeiner Potenz $x^2$, ſondern von der Funktion $(a - x)$ das Zeichen verändern, damit die gleich anfangs gefundene Gleichung $x(a - x) = \frac{1}{2} a^2$ paſſend werde, um wirklich die Bedingungen der Aufgabe auszudrücken, und dann muſs man, wie vorher, die Modifikation ſuchen, die man zu gleicher Zeit mit dem Syſtem, auf dem die Betrachtung beruht, vorzunehmen hat, damit es zu der in der Gleichung vorgenommenen Veränderung paſſen könne. Dieſe Modifikation beſteht darin, den geſuchten Punkt rechts von $B$ anzunehmen.

61. Einer der hauptſächlichſten Sätze jener Lehre, die ich ſchon (39 u. fgg.) zu widerlegen geſucht habe, beſteht in der Behauptung, daſs die Rechnung ſelbſt den Fehler verbeſſere, den man beym Ausdruck der Bedingungen einer Aufgabe begangen haben könnte, wenn man z. B. irrig einen geſuchten Punkt auf einer gegebenen Linie rechts von einem gegebenen Punkte annimmt, der als links liegen ſoll. Nach dieſer Lehre, wenn man als Unbekannte die Entfernung des geſuchten Punktes vom gegebenen Punkte an-

nimmt, muſs man dann für dieſe Unbekannte ihren Werth ſelbſt bloſs mit entgegengeſetztem Zeichen finden; daſs man alſo nur dieſen Werth nach einer Richtung, die der angenommenen entgegengeſetzt iſt, zu tragen braucht, um den wahren geſuchten Punkt zu erhalten.

Daraus würde folgen, daſs, weil der Punkt $K''$ wirklich der Frage Genüge leiſtet, und $\overline{AK''} = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$, man, wie man den Irrthum beging, den geſuchten Punkt rechts von $A$ in $K$ anzunehmen, für $\overline{AK}$ denſelben Werth nur negativ hätte finden müſſen. Das iſt aber nicht der Fall (58), weil man nach dieſer falſchen Vorausſetzung für $\overline{AK}$ einen eingebildeten Werth findet. Die Rechnung berichtigt alſo nicht immer den Irrthum, den man bey der Stellung eines geſuchten Punktes begangen haben könnte. Sie verbeſſert ihn nur, wenn die beyden verglichenen Syſteme bloſs in inverſer Correlation ſind, wie wir (43) annahmen, und nicht, wenn ſie in eingebildeter oder complexer Correlation, wie im gegenwärtigen Falle, ſind.

62. Aus dem Vorigen folgt, daſs man jedesmal, wenn der Ausdruck der Bedingungen einer Aufgabe nur zu Wurzeln führt, die nicht wirklich und poſitiv ſind, ſchlieſsen kann, daſs die Hypotheſen, auf denen die Betrachtung beruhte, nicht mit den Bedingungen der Aufgabe übereinſtimmen, daſs es ferner unmöglich ſey, dieſen Bedingungen Genüge zu leiſten, ohne die Hypotheſen zu ändern, oder ſich an die Hypotheſen zu halten, ohne die Bedingungen zu ändern. In allen Fällen werden die Gleichungen, die zugleich

Bedingungen und Hypotheſen ausdrücken, nothwendig negative oder eingebildete Reſultate geben müſſen, wenn die einen nicht mit den andern übereinſtimmen können. Damit ſie nur bedeutende Reſultate uns darbieten, muſs man alſo nothwendigerweiſe dahin gelangen, die Hypotheſen, auf denen die Betrachtung beruht, mit den Bedingungen der Aufgabe zu vereinigen. Welche nun auch immer die Modifikationen ſeyn mögen, die man mit den einen oder den andern vornehmen muſs, ſo werden die Gleichungen, die immer nur die Ueberſetzung beyder zuſammengenommen ſind, nothwendigerweiſe von ihrer Seite analoge, mehr oder minder merkbare Modifikationen erleiden, nachdem die Veränderungen, die man mit den Bedingungen oder Hypotheſen vorgenommen hat, mehr oder minder beträchtlich ſind.

Noch mehr, eine poſitive und wirkliche Wurzel, wo die Gleichung genau Bedingungen und Hypotheſen in Uebereinſtimmung ausdrückt, giebt nicht immer eine wahre Auflöſung. Denn es iſt nicht genug, daſs Bedingungen und Hypotheſen übereinſtimmen und die allgemeine Gleichung beyden genug thue, ſondern die Wurzel, die man zur Auflöſung anwenden will, muſs noch beſonders dieſen Bedingungen und dieſen Hypotheſen genug thun. Damit die allgemeine Gleichung ihnen Genüge leiſte, iſt es hinlänglich, wenn nur eine von ihren Wurzeln es auch thut; aber wenn die algebraiſchen Umformungen mit dieſer Wurzel eine andere Wurzel, die nicht Genüge leiſtet, verſchmolzen haben, ſo wird dieſe keine wahre Auflöſung geben, ſie kann nur, wie die negativen und eingebildeten

Wurzeln, eine Frage, die mit der erſtern analog iſt, anzeigen, und deren Auflöſung geben; aber der Frage, ſo wie ſie aufgeſtellt iſt, leiſtet ſie keine Genüge.

Man kann die Frage aufwerfen: ob es möglich ſey, daſs algebraiſche Umformungen mit den eigentlichen Wurzeln andere verſchmelzen können, die nicht die eigentlichen Wurzeln, aber doch wirklich und poſitiv ſind. Man kann viele Beyſpiele anführen, hier nur ein ſehr einfaches, das ich aus Boſſüt's Geometrie nehme, dem dieſe Bemerkung nicht entgangen iſt.

(Siehe ſeine *Application de l'Algèbre à la Géometrie*, *No.* 25. der Ausgabe vom Jahre *VIII.*)

Daſſelbe Beyſpiel findet ſich auch in Newton's *Arithmetica univerſalis.*

Wir wollen annehmen, daſs $ABC$ (*Fig.* 1.) ein rechtwinklichtes Dreyeck ſey, in welchem man die Hypothenuſe $\overline{BC}$ und die Summe $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}$ der Catheten und des Perpendikels weiſs, man will den Werth dieſes Perpendikels wiſſen.

Wir wollen

$$\overline{BC} = a$$

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} = b$$

den geſuchten Perpendikel $= x$

die unbekannte Seite $\overline{AB} = y$ nennen.

Das rechtwinklichte Dreyeck $ABC$ giebt

$$a^2 = y^2 + (b - x - y)^2 \text{ oder}$$

$$a^2 = 2y^2 + b^2 - 2bx + x^2 - 2by + 2xy \quad (A).$$

Weil $\triangle BAC \sim \triangle ADC$

$$a : y = b - x - y : x \text{ oder}$$

$$ax = by - xy - y^2 \ (B).$$

Vergleicht man die Gleichungen in $A$ und $B$, um $y$ wegzuschaffen, und löst die Gleichung in $x$, die vom zweyten Grade ist, auf, so erhält man

$$x = a + b \pm \sqrt{(2a^2 + 2ab)}.$$

Hier sind zwey Werthe für $x$, d. h. für den gesuchten Perpendikel $\overline{AD}$ beyde positiv. Die erste von diesen Auflösungen ist aber offenbar falsch, weil es sichtbar unmöglich ist, dass den Perpendikel $x > a + b$.

Also reicht es nicht für die Wurzel einer Gleichung hin, dass sie wirklich und selbst positiv sey, um die Auflösung einer Aufgabe zu geben, deren Bedingungen sie ausdrückt. Diese Wurzel muss auch noch zugleich mit diesen Bedingungen und den Hypothesen, auf denen die Betrachtung beruht, übereinstimmen.

Aus allem Vorhergesagten können wir allgemein folgern:

1) Damit die Auflösung einer gegebenen Aufgabe durch irgend eine Wurzel einer Gleichung in der That statt finde, müssen die vorgestellten Bedingungen die Hypothesen, auf welche die Betrachtung gegründet ist, und die Construktionen oder sonstigen Verrichtungen, welche die Wurzel dieser Gleichung anzeigt, alle in Uebereinstimmung seyn.

2) Beſteht irgend eine Unverträglichkeit zwiſchen den einen oder den andern, ſo muſs man dieſe Wurzel nur als eine bloſse Hindeutung auf eine andere mit der erſten analoge Frage betrachten, und um ihre wahre Bedeutung zu haben, muſs man die Rechnung mit anderen Bedingungen oder anderen Hypotheſen wieder anfangen, bis ſie alle ſowohl unter ſich, als mit den Verrichtungen übereinſtimmend ſind, welche die Wurzel der Gleichung, die auch nach dieſen Veränderungen modificirt iſt, anzeigen könnte.

3) Die negativen und eingebildeten Wurzeln ſind nie wahre Auflöſungen der vorgeſtellten Frage, ſondern bloſse Anzeigen anderer Fragen, die mehr oder weniger von den erſten unterſchieden ſind. Oft ſind ſie bloſse algebraiſche Formen, durchaus unbedeutend, welche die algebraiſchen Umformungen mit den wirklichen Wurzeln verſchmolzen haben.

4) Wirkliche und poſitive Wurzeln drükken eben ſo wenig die eigentlichen Auflöſungen aus, als negative oder eingebildete, und ſind, wie ſie, nur bloſse Anzeigen analoger Fragen, wenn die Konſtruktionen oder ſonſtigen Verrichtungen, zu denen ſie leiten, nicht

ganz mit den vorgeſtellten Bedingungen und den Hypotheſen, auf denen die Betrachtung beruhte, in Uebereinſtimmung ſind.

5) Keine Gleichung oder Wurzel einer Gleichung kann die eigentliche Auflöſung geben, ſo lange ſie ungereimte Quantitäten oder nicht ausführbare Verrichtungen enthält; ausgenommen, wenn ſie ſich wechſelſeitig zerſtören, wie es bey den wirklichen Wurzeln der Gleichungen vom dritten Grade geſchieht.

6) Dieſe unverſtändlichen Formen müſſen doch nicht vernachläſsigt werden. Man kann ſie als wirkliche Formen gebrauchen, weil man ſie durch bloſse algebraiſche Umformungen verſchwinden laſſen kann, und dann nur applicirte und auf den vorgeſtellten Gegenſtand unmittelbar anwendbare Formeln zurückbleiben. Doch müſſen, wie vorher bemerkt iſt, dieſe Formeln, die vorgeſtellten Bedingungen und die Hypotheſen, auf denen die Betrachtung beruhte, alle unter einander in Uebereinſtimmung ſeyn.

63. So lange man nicht aus der Syntheſis herausgeht, d. h. ſo lange man die Zeichen + und — in einer Rechnung nur braucht, um ausführbare Verrichtungen anzuzeigen, iſt es ganz unmöglich, daſs

man auf eingebildete oder negative allein ſtehende Quantitäten ſtoſse. Dieſe erſcheinen nur, wenn man ſich von der ſynthetiſchen Methode entfernt, indem man die Zeichen braucht, um unausführbare Verrichtungen anzuzeigen, oder wenn man die Reſultate, zu denen man durch Syntheſis gelangen konnte, auf Hypotheſen anwenden will, die nicht mit den urſprünglich durch dieſe Reſultate ausgedrückten Bedingungen übereinſtimmen. Die negativen Werthe entſtehen daher, weil, um die angezeigten Verrichtungen auszuführen, man eine wirkliche Quantität von o abziehen müſste, oder überhaupt irgend eine Quantität von einer kleineren Quantität; und die eingebildeten, weil man mit dieſen erſten ſchon unmöglichen Reſultaten neue Verrichtungen vornehmen will. Man kann alſo dieſe Gleichungen oder Formeln, die negative oder eingebildete Quantitäten enthalten, als aus andern urſprünglich möglichen Formeln abgeleitet betrachten, weil die Quantitäten, die abgezogen werden ſollen, darin kleiner waren, als die Quantitäten, von denen ſie abgezogen werden ſollten, und die nachher unmöglich geworden ſind, kraft einer Veränderung der Ordnung, die durch eine ſtufenweiſe Verwandelung unter den Quantitäten bewirkt wurde. Geht man von da aus, ſo ſieht man, wie nach der Reihe dieſe Werthe entſtehen, und da unter allen bekannten Verrichtungen der Algebra nur eine iſt, durch die dieſe eingebildeten Gröſsen entſtehen, nämlich die Ausziehung der Quadratwurzel, da ferner dieſe Verrichtung immer die beyden Zeichen + und — vor der Wurzelgröſse ſetzt, ſo findet man leicht,

dafs alle möglichen eingebildeten Werthe auf diese Formen zu bringen sind:

$$\pm \sqrt{-B} \text{ oder } \pm B\sqrt{-1}.$$

Und alle Werthe, die theils wirklich, theils eingebildet sind, auf die Form:

$$A \pm B\sqrt{-1};$$

dafs ferner diese Werthe nur zwey und zwey entstehen können; und dafs folglich jede eingebildete Wurzel in einer Gleichung nothwendig von einer andern begleitet ist, die von ihr durch das Zeichen der Wurzelgröfse unterschieden ist, welche das eingebildete ausdrückt. Da aber die gröfsten Mathematiker sich mit diesen wichtigen Wahrheiten beschäftigt und sie nach der Strenge erwiesen haben, so könnte ich auf jeden Fall nur das, was sie in dieser Rücksicht gesagt haben, wiederholen.

64. In der Synthesis giebt es keine zwey Arten, die Wurzel aus einer gegebenen Quantität zu ziehen; die Analysis hat so viel verschiedene Arten, als Einheiten im Exponenten der Wurzelgröfse sind. Aber was sind alle diese Wurzeln, ausgenommen die, welche die Synthesis giebt, anders, als algebraische Formen, unverständlich in ihrem jetzigen Zustande, und die nur durch Umformungen nützlich werden können. Man kann unmöglich auf eine genugthuende Art beweisen, dafs $(-a)^2 = a^2$, wenn $-a$ nicht auf eine absolute gröfsere Quantität folgt; alle Betrachtungen, durch welche man dieses Princip für andere Fälle begründen wollte, würden fehlerhaft seyn, denn um zu beweisen, dafs $(-a)^2 = a^2$, mufs man erst sagen, was $-a$ allein ist. Das kann man

aber nicht, weil $-a$ blofs ein eingebildetes Wefen ift. Wahr und eines Beweifes fähig ift blofs, dafs die Vorausfetzung $(-a)^2 = a^2$ in einer Rechnung nicht zu falfchen Refultaten führen kann, wenn man nämlich durch Umformungen dahin gelangen kann, das, was unverftändlich in den Ausdrücken ift, verfchwinden zu laffen. Es ift beynahe hier derfelbe Fall, wie in der Rechnung des Unendlichen, wenn man die Differentiale als wahre Quantitäten betrachtet. In diefer gelangt man zu genauen Refultaten, indem man die Irrthümer compenfirt; in der Lehre von negativen und eingebildeten Werthen find keine Irrthümer in den Gleichungen, fondern blofs unverftändliche Formen, die fich wechfelfeitig wegfchaffen, und fo genaue Refultate, die wirklicher Anwendung fähig find, hervorbringen.

65. Man forme eine Gleichung, die pofitive, negative und eingebildete Wurzeln enthält, auf irgend eine Art um, indem man immer diefelbe Unbekannte beybehält. Weil es nur wirklich, gewifs beftimmte Arten, die vorgeftellte Frage aufzulöfen, giebt, wird man nie fo die wirklichen und pofitiven Wurzeln, die wahrhaftig und ganz auf die Frage anwendbar find, vermehren, vermindern, oder verändern können. Diefe wirklichen und pofitiven Werthe, die ganz der Frage Genüge leiften, und die einmal für die unbekannte gefetzt, die Gleichung auf $o = o$ bringen, werden fie immer in allen andern möglichen Formen auch auf $o = o$ bringen.

Diefs ift nicht der Fall mit negativen und eingebildeten Wurzeln, auch nicht mit denen, die die Frage

nicht vollſtändig auflöſen (63). Eine Umformung, die man mit einer Gleichung vornimmt, kann eine unendliche Anzahl dieſer neuen Wurzeln entſtehen oder verſchwinden laſſen, weil die erſten, die feſt mit der Frage verbunden und die einzigen ſind, die ſie wahrhaftig auflöſen, nie herausgeſchafft werden können, indeſs man die andern, da ſie nur mit der Hauptfrage andere acceſſoriſche Zuſammenſtellungen vermengen, auf verſchiedene Arten verändern oder herausſchaffen kann.

Wir wollen z. B. die Gleichung $x = a$ nehmen; erheben wir ſie zum Quadrate, ſo haben wir $x^2 - a^2 = 0$. Durch dieſe leichte Umformung entſteht eine negative Wurzel, die vorher nicht da war, nämlich

$$x = -a,$$

aber die poſitive Wurzel $x = a$ hat ſich nicht verändert. Ich quadrire nochmals $x^2 = a^2$, ſo erhalte ich $x^4 = a^4$ oder $x^4 - a^4 = 0$, eine neue Umformung, aus der zwey eingebildete Wurzeln entſtehen, die vorher nicht da waren, nämlich

$$x + r - a = 0$$
$$x - r - a = 0,$$

ohne irgend etwas an der wirklichen und poſitiven Wurzel $x = a$ zu ändern, die unveränderlich bleibt. Man ſieht alſo, wie bloſse Umformungen mit den Wurzeln, welche die wahre Auflöſung einer vorgeſtellten Frage geben, algebraiſche Formen verſchmelzen können, die an ſich unbedeutend ſind.

Weil die wirklichen und poſitiven Wurzeln, die allein die wahre Auflöſung einer Frage geben, unver-

änderlich ſind, welche Umformungen man auch immer mit den Gleichungen vornimmt, ſo ſieht man, daſs, wenn man ſelbſt dieſe Gleichungen durch eingebildete Formen gehen lieſse, vorausgeſetzt, daſs man ſie endlich auf poſitive und wirkliche Formen zurückführte, d. h. die keine ungereimte Quantitäten oder unausführbare Verrichtungen enthalten, ſie immer dieſelben wirklichen und poſitiven Wurzeln wieder geben werden. So hat die Analyſis den Vortheil, die Wege der Vereinfachung, die ſich darbieten, einſchlagen zu können, wenn ſelbſt die Gleichungen hier durch nichtsbedeutende Formen gehen müſſen, vorausgeſetzt, daſs dieſe Gleichungen immer algebraiſch genau bleiben, d. h. daſs die Umformungen, welchen man ſie unterwirft, immer mit den ſtrengen Regeln der Algebra übereinſtimmen.

Eine genaue Formel, d. h. eine genaue Ueberſetzung der Gegebenen, kann ungereimte Werthe enthalten; in der That, wenn ſie nicht zuſammenhängende und unverträgliche Bedingungen und Hypotheſen ausdrückt, ſo wird ſich gerade ihre Genauigkeit darin zeigen, dieſe Unverträglichkeiten durch ungereimte Formen oder unausführbare Verrichtungen anzuzeigen; denn die Syntheſis, wie ich ſchon geſagt habe, drückt nur die Verhältniſſe des Daſeyns unter Quantitäten aus; die Analyſis aber nicht dieſe allein, ſondern auch die Verhältniſſe der Unverträglichkeit.

Selbſt in dem Falle, wenn eine Formel, indem ſie unmögliche Verhältniſſe ausdrückt, auf deren Natur ſelbſt durch die Anzeige gewiſſer unausführbarer Verrichtungen hindeutet, kann ſie doch durch regel-

mäſsige Umformungen der Algebra auf eine klare Form gebracht werden. Aber dann drückt ſie nur die Eigenſchaften des Syſtems aus, die unter einander nicht unverträglich waren. Sind dieſe Eigenſchaften nun dieſem und mehreren anderen Syſtemen gemein, ſo gehört dieſe Formel allen zugleich, und folglich muſs ſie durch die Umformung allgemein genug geworden ſeyn, um ſie auf jede insbeſondere anwendbar zu machen. Dieſs iſt der Grund, warum eine Gleichung, die gemacht ward, um irgend eine beſondere Eigenſchaft auszudrücken, zu einem mehr oder minder erhöhten Grade ſteigt, je nachdem dieſe Eigenſchaft einer gröſseren oder geringeren Anzahl von Syſtemen gehört.

66. Man ſieht leicht ein, daſs man ſo auf eine gemeinſchaftliche Form alle Gleichungen zurückführen kann, die von einander nur durch Zeichen, in der allgemeinſten Bedeutung genommen, verſchieden ſind; denn man kann immer durch die gewöhnlichen Umformungen der Algebra alle Wurzelgröſsen verſchwinden laſſen, und ſo gleich die Formeln dahin bringen, nur durch die Zeichen + und — verſchieden zu ſeyn, welche ſich entſprechende Ausdrücke afficiren. Aber dieſer letzte Unterſchied verſchwindet eben ſo, wenn man alle Ausdrücke, die + haben, in ein Glied, und in das andere alle Ausdrücke, die — haben, bringt, und darauf alles zur zweyten Potenz erhebt.

Wenn man alſo willkührlich die Zeichen, die in eine genaue Formel gehören, veränderte, indem man für das Zeichen + oder — oder überhaupt für den

natürlichen Coefficienten 1 jeder Quantität irgend einen andern Coefficienten, aus den Wurzeln der Einheit genommen, ſetzte, ſo würde die ſo veränderte Formel demohngeachtet durch die bloſsen gewöhnlichen Umformungen der Algebra auf eine genaue und klare Formel gebracht werden können.

Durch dieſe Verſchiedenheit in den Zeichen zeigen ſich in den Formeln, welche für verſchiedene correlative Syſteme paſſen, die Abweichungen, die ſie charakteriſiren. Bildet man eine allgemeine Ueberſicht dieſer Verſchiedenheiten, ſo zeigt man dadurch die Mittel an, auf das eine die Formeln anzuwenden, welche man gefunden haben könnte, indem man die Rechnung auf ein anderes gründete; und bringt man ſie durch algebraiſche Umformungen zur Identität, ſo findet man die Eigenſchaften, die mehreren unter ihnen oder allen gemein ſind.

67. Wir wollen z. B. annehmen, man habe zwey Syſteme von Quantitäten, deren eines aus

$$a,\quad x,\quad y$$

zuſammengeſetzt ſey, und ſo, daſs man $x + y = a$ habe, das andere aus

$$a,\quad x',\quad y',$$

und ſo, daſs $x' - y' = a$: ſo ſind dieſe beyden Syſteme offenbar in einfacher, aber indirekter Correlation, weil ſie, wenn man das Zeichen von $y'$ verändert, identiſche Formen annehmen. Dieſs angenommen, wollen wir mit dieſen zwey verſchiedenen Formeln dieſelbe Umformung vornehmen, nachdem wir vorher in der erſten $y$ und $a$, und in der zweyten die

entſprechenden Quantitäten $y'$ und $a$ verſetzt haben, woraus

$x - a = -y$, und $x' - a = y'$ entſteht.

Erheben wir nun dieſe beyden letzten Gleichungen zur zweyten Potenz, ſo erhalten wir

$x^2 - 2ax + a^2 = y^2$ und $x'^2 - 2ax' + a^2 = y'^2$,

Formeln, die durchaus ähnlich ſind, wenn ſie gleich aus anfangs verſchiedenen Formeln gezogen ſind. Man kann alſo jede dieſer Umgeformten anſehen, als drücke ſie die gemeinſchaftlichen Eigenſchaften der zwey aufgeſtellten indirekt correlativen Syſteme aus, indeſs die Eigenſchaften, die eines von dem andern unterſcheiden, nur aus den erſten Formeln $x + y = a$ und $x' - y' = a$ gezogen werden können.

Es iſt bemerkenswerth, daſs die erſte dieſer Gleichungen die iſt, welche die Natur der Ellipſe ausdrückt, wenn man ſie auf ihre Brennpunkte bezieht, und als Coordinaten $x$, $y$ die Entfernungen jedes Punktes der Curve von dieſen Brennpunkten annimmt. Eben ſo drückt die zweyte die Natur der Hyperbel aus, auf gleiche Weiſe auf ihre Brennpunkte bezogen. Die gemeinſchaftlichen Eigenſchaften der Ellipſe und der Hyperbel ſind alſo durch die, beyden gemeine, Gleichung

$$x^2 - 2ax + a^2 - y^2 = 0$$

ausgedrücht, indeſs man die Eigenſchaften, die ſie unterſcheiden, nur direkt aus den erſten vorher gegebenen Formeln erhalten kann.

Wir wollen ferner zwey Syſteme von Quantitäten annehmen, eins, das aus den vier Quantitäten

$a$, $b$, $x$, $y$

beſteht, unter denen man die Gleichung

$$a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2 \text{ hat;}$$

das andere, das aus den vier Quantitäten

$$a,\ b,\ x',\ y'$$

zuſammengeſetzt iſt, wo

$$a^2 y'^2 = b^2 x'^2 - a^2 b^2.$$

Zwiſchen den Quantitäten, die dieſe beyden Syſteme ausmachen, iſt weder direkte noch indirekte Correlation, weil man nie die beyden Gleichungen auf eine Form bringen kann, man mag ihre Zeichen verändern wie man will. Setzt man z. B. $-x$ ſtatt $x$, ſo behält das Quadrat $x^2$ demungeachtet daſſelbe Zeichen. Aber es iſt eine complexe Correlation zwiſchen den beyden Syſtemen, d. h. eine einfache indirekte Correlation, nicht zwiſchen den Quantitäten ſelbſt, von denen wir eben ſprachen, ſondern zwiſchen den ähnlichen Funktionen dieſer Quantitäten ſelbſt. Statt das erſte Syſtem als aus $a$, $b$, $x$, $y$ zuſammengeſetzt zu betrachten, können wir es nur als aus

$$a^2,\ b^2,\ x^2,\ y^2$$

den Quadraten der erſten, beſtehend anſehen. So kann das zweyte aus

$$a^2,\ b^2,\ x'^2,\ y'^2$$

den Quadraten der entſprechenden Quantitäten, beſtehen. Wir ſehen, daſs eine einfache indirekte Correlation zwiſchen den Quantitäten $a^2$, $b^2$, $x^2$, $y^2$ des erſten und $a^2$, $b^2$, $x'^2$, $y'^2$ des zweyten ſtatt findet, weil man nur das Zeichen der letztern $y'^2$ zu verändern braucht, um die Formeln durchaus ähnlich zu machen.

Dieſs angenommen, wollen wir mit den beyden Formeln eine gemeinſchaftliche Umformung vornehmen, indem wir bloſs alles zur zweyten Potenz erheben, dann werden wir

$$a^4 y^4 = a^4 b^4 - 2 a^2 b^4 x^2 + b^4 x^4, \text{ und}$$
$$a^4 y'^4 = a^4 b^4 - 2 a^2 b^4 x'^2 + b^4 x'^4$$

erhalten, Gleichungen, die durchaus von derſelben Form ſind, und die folglich die gemeinſchaftlichen Eigenſchaften beyder correlativen Syſteme ausdrücken, obgleich ihre Correlation complex iſt.

Die erſte dieſer Gleichungen iſt die für die Ellipſe auf die groſse Axe bezogen, indem man die Abſciſſen vom Mittelpunkte aus, und die Ordinaten rechtwinklicht nimmt; die zweyte iſt die für die Hyperbel eben ſo auf die erſte Axe bezogen.

Die letztern Gleichungen, die wir eben gefunden haben, enthalten alſo die Eigenſchaften, die dieſe beyden Curven gemeinſchaftlich haben, indeſs die Eigenſchaften, welche die eine von der andern unterſcheiden, nur aus den erſten Gleichungen

$$a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2 \text{ und}$$
$$a^2 y'^2 = b^2 x'^2 - a^2 b^2$$

gezogen werden können.

68. Eben ſo wie man ein gemeinſchaftliches Reſultat erhält, was folglich die gemeinſchaftlichen Eigenſchaften beyder Curven in ſich faſst, wenn man die Gleichung für die Ellipſe und die Hyperbel zum Quadrat erhebt, eben ſo ſchlieſst auch jede dieſer erſten Gleichungen, z. B. die der Ellipſe, die beyden Armen der Curve gemeinſchaftlichen Eigenſchaften ein, die man von einander abſondern kann, wenn

man die Quadratwurzel aus dieſer Gleichung zieht. Das Reſultat dieſer Verrichtung iſt

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}$$

oder die beyden Wurzeln

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)},$$

$$y = -\frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}.$$

Nimmt man nun an, daſs die erſte Wurzel den Werth der Ordinate rechts von der Axe genommen bedeute, ſo drückt die zweyte (38) den Werth einer gleichen Ordinate aus, die man auf der andern Seite der Axe nimmt. So werden dieſe beyden Wurzeln die unterſcheidenden Eigenſchaften der beyden Arme derſelben Curve ausdrücken, ſo wie die beſondern Gleichungen für die Ellipſe und Hyperbel die unterſcheidenden Eigenſchaften dieſer beyden Curven ausdrücken, indeſs ihre gemeinſchaftlichen Eigenſchaften in einer oder der andern dieſer Gleichungen ſelbſt, zum Quadrat erhoben, enthalten ſind.

Der Unterſchied zwiſchen den beyden Armen derſelben Curve kann, wenn man will, noch deutlicher gemacht werden, wenn man die Curve auf eine andere mit der erſten parallele Axe bezieht. Ihre Entfernung von der erſten ſey $a$, ſo wird die Gleichung für den erſten Arm

$$y = a + \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)},$$

die für den zweyten

$$y = a - \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}.$$

In dieſen Gleichungen iſt die Verſchiedenheit der Form merkbar, und läſst ſo die unterſcheidenden Eigenſchaften der beyden Arme der Curve, welche ſie ausdrückt, beſſer erkennen.

69. Dieſs iſt, nach meiner Meynung, die wahre Theorie der Quantitäten, welche in der Analyſis uneigentlich poſitive und negative genannt werden. Ich ſage uneigentlich, denn es iſt klar, daſs es in der That keine an ſich poſitive oder negative Quantitäten giebt, ſondern bloſs abſolute Quantitäten, die zu andern hinzugefügt, oder wenn ſie die kleineren ſind, von andern abgezogen werden können. Die Ausdrücke poſitiv und negativ bezeichnen nur die Gleichförmigkeit oder Nicht-Gleichförmigkeit derer, die man ſo nennt, mit den ihnen im Urſyſtem entſprechenden Quantitäten, was man wenigſtens ſtillſchweigend als Maaſsſtab zur Vergleichung annimmt. Wenn die Eigenſchaften dieſes Urſyſtems durch klare Formeln ausgedrückt ſind, d. h. durch ſolche, die keine ungereimte Quantität enthalten und keine unausführbare Verrichtungen anzeigen, und man dieſe Formeln auf ein anderes Syſtem anwenden will, ſo werden die Quantitäten, welche man poſitiv nennt, diejenigen ſeyn, deren Zeichen man nicht zu verändern braucht; die negativen aber diejenigen, deren Zeichen man von + in — verwandeln muſs, und die eingebildeten die, deren Zeichen von + ſich in $r-1$ verändert, oder deren Quadrat, Cubus und ſonſtige Funktion das Zeichen verändern muſs, damit die Formeln des Urſyſtems, ohne ungereimte Quantitäten oder unausführbare Verrichtungen zu enthalten,

fortdauernd unmittelbar anwendbar auf das betrachtete Syſtem ſeyn mögen.

So iſt eine negative Quantität nicht die, welche — als eigenes Zeichen hat, weil keine Quantität ein ihr eigenes Zeichen haben kann, ſondern die, die — als Zeichen der Correlation hat. Es iſt der Unterſchied zweyer abſoluten Quantitäten, von denen die urſprünglich gröſsere durch die ſtufenweiſe Veränderung des Syſtems die kleinere geworden iſt. Ueberhaupt ſind poſitive, negative und eingebildete Quantitäten im Allgemeinen nichts anders als algebraiſche Formen, die, wenn man ſie in die klaren Formeln des Urſyſtems für die abſoluten Quantitäten ſetzt, wo die Zeichen + und — keine andere Funktion haben, als ausführbare Verrichtungen anzuzeigen, dieſe Formeln unmittelbar auf das betrachtete Syſtem, wenn man es nach und nach in allen möglichen Zuſtänden der Umformung betrachtet, anwendbar machen, obgleich die Rechnung nur für die beſondere Lage geführt ward, die man als Maafsſtab zur Vergleichung annahm, und die wir Urſyſtem genannt haben.

Wenn man z. B. ſagt, daſs der Coſinus eines Bogens, der gröſser als ein Viertheil des Umkreiſes iſt, negativ ſey, oder daſs, wenn man $\pi$ den vierten Theil des Umkreiſes nennt, man

$$cof\,(\pi + a) = -\,fin\,a$$

habe, ſo heiſst das, daſs die algebraiſche Form $-\,fin\,a$, in irgend einer Rechnung für die wahre Quantität $cof\,a$ geſetzt, nicht der Genauigkeit der Rechnung Schaden thut, ſondern die Reſultate dieſer Rechnung auf den Fall anwendbar macht, wo der

Winkel $\pi + a$ iſt; obgleich die Betrachtung auf der Hypotheſe beruhte, daſs der Winkel bloſs $a$ ſey.

Eben ſo, wenn man ſagt, daſs

$$\sin(z \cdot \sqrt{-1}) = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2\sqrt{-1}}$$

indem $e$ die Zahl vorſtellt, deren hyperboliſcher Logarithme 1 iſt, ſo bedeutet dieſs, daſs das $2\sqrt{-1}$ und $\frac{e^{-z} - e^{z}}{2\sqrt{-1}}$ zwey algebraiſche Formen ſind, die, wechſelſeitig in irgend eine Rechnung geſetzt, die man zwiſchen den wahren Quantitäten $z$ und $\sin z$ führt, welche ſie vorſtellen, nicht die Genauigkeit des Reſultats, aber wohl ſeine Anwendung ändern, d. h. es auf andere Fälle, als worauf die Betrachtung gegründet wurde, anwendbar machen.

Auf gleiche Art hat Euler die Formel bewieſen

$$\log -a = \log a \pm (2m + 1)\pi\sqrt{-1},$$

wo $m$ irgend eine ganze Zahl und $\pi$ den halben Umkreis bedeutet. Wir erfahren, daſs $-a$, und $\log a \pm (2m + 1)\pi\sqrt{-1}$ zwey algebraiſche Formen ſind, die, in irgend eine zwiſchen den wahren Quantitäten $a$ und $\log a$ geführte Rechnung geſetzt, nicht die Genauigkeit des Reſultats ändern, es aber auf bey den erſten Hypotheſen unvorhergeſehene Fälle anwendbar machen. Beym erſten Anblick ſcheinen dieſe Subſtitutionen algebraiſcher negativer oder eingebildeter Formeln für wahre Quantitäten in den Formeln des Urſyſtems zu nichts zu führen, weil ſie in die Rechnung unverſtändliche Ausdrücke bringen, aber wenn ſie legitim ſind, wie die, von denen wir

oben ſprachen, ſo iſt die Entwickelung dieſer Formeln, durch die bloſsen Umformungen der Algebra, genug, um das, was ſich darin unverſtändlich und ungereimt fand, verſchwinden zu laſſen, und gerade hierin beſtehen, wie ich ſchon geſagt habe, die eigenen Hülfsquellen der Analyſis, welche der Syntheſis fehlen.

70. Betrachtet man die Frage aus einem andern Geſichtspunkte, ſo kann man freylich übereinkommen, durch die Zeichen + und — ſtets wirkliche Quantitäten, die nur in entgegengeſetztem Sinn von einander genommen werden, zu bezeichnen. Aber dann muſs man ſich erklären, was man unter dem Ausdruck Quantitäten, in entgegengeſetztem Sinne genommen, verſteht, und zeigen, daſs man eben ſo mit Zeichen, durch die man ſie unterſcheidet, verfahren darf, als man thut, wenn man dieſelben Zeichen bloſs zum Ausdruck ausführbarer Verrichtungen braucht. Das iſt aber der ſchwierige Punkt, und ich glaube nicht, daſs man ihn auflöſen kann, wenn man nicht dieſen in entgegengeſetzter Richtung genannten Quantitäten die Bedeutung derer beylegt, die ich direkt und invers genannt habe, und wenigſtens ſtillſchweigend das unterſuchte Syſtem auf ein anderes Grundſyſtem bezieht, das als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt. Man iſt nur von dieſer ſtillſchweigenden Annäherung entbunden, wenn man mit dem Grundſyſtem ſelbſt arbeitet, d. h. wenn man ſynthetiſch verfährt, oder nur die Zeichen als Abkürzungen gebraucht, und um ausführbare Verrichtungen anzuzeigen. Hat man dann eine Formel für das Urſyſtem gefunden,

gefunden, und will ſie auf ein anderes anwenden, für das ſie nicht gemacht iſt, ſo benutzt man, ſtatt von neuem die Formel, die für den letzten Fall paſst, zu ſuchen, die erſtere, indem man nur die nöthigen Modifikationen darin vornimmt. Dieſe Modifikationen beſtehen, wie ich vorhin gezeigt habe, darin,

1) wenn die Correlation direkt iſt, bloſs nach den Fällen die abſoluten Werthe der Quantitäten zu ändern;
2) iſt die Correlation noch immer einfach, aber indirekt, auſser den abſoluten Werthen dieſer Quantitäten, die Zeichen einer gröſsern oder geringeren Anzahl unter ſich zu ändern.
3) Endlich iſt die Correlation bloſs eingebildet oder complex, die Zeichen, nicht der einfachen Quantitäten, die in die Formeln gehören, ſondern der mehr oder minder zuſammengeſetzten Funktionen dieſer Quantitäten, zu verändern.

Iſt einmal die Veränderung der Zeichen in der unterſuchten Formel bewirkt, ſo wird ſie auf das umgeformte Syſtem unmittelbar anwendbar, eben ſo wie ſie es vor der Veränderung auf das Urſyſtem war; und dieſs umgeformte Syſtem kann jetzt als Maaſsſtab zur Vergleichung für andere dienen, wenn man mit der für daſſelbe geeigneten Formel neue Modifikationen vornimmt, welche die Veränderungen heiſchen, die eintreten müſſen, nachdem das Syſtem andere Umformungen leidet.

So entſpringt dieſe Theorie weſentlich aus einem Grundſatz, der nicht allein auf die hier behandelte Frage angewandt werden kann, ſondern auf alle

Theile der Mathematik und der Dialektik überhaupt, und der darin beſteht, immer die verſchiedenen unbekannten Gegenſtände, die man vergleichen will, auf daſſelbe bekannte Objekt zu beziehen, das man als Maaſsſtab zur Vergleichung annimmt. Durch dieſes Mittel löſt man die Schwierigkeit auf, und bringt die verwickelte Frage, das Verhältniſs zwiſchen zwey unbekannten Dingen darzuſtellen, auf dieſe beyden einfachen Fragen nämlich, das Verhältniſs jedes dieſer unbekannten Dinge insbeſondere, zu demſelben dritten bekannten Dinge darzuſtellen. Dieſs iſt bey allem der natürliche Gang des Geiſtes.

71. Der ganze Kunſtgriff der Numeration z. B. beſteht darin, ein Mittel zu finden, eine kleine Anzahl Ziffern in methodiſche Ordnung zu bringen, ſo daſs man bloſs mit dieſen Ziffern alle mögliche Zahlen auf die Art darſtellen kann, daſs man auch theilweiſe auf ſie wirken und ſo Schwierigkeiten vermeiden könne, indem man die Verrichtungen, die man mit beträchtlichen Zahlen vorzunehmen hat, in eine Reihe theilweiſer Verrichtungen an kleinen Zahlen verwandelt; d. h. an Zahlen, die klein genug ſind, damit man ſich von jeder einen klaren Begriff bilden, und ſie unmittelbar durch Aufmerkſamkeit und Gedächtniſs mit einander verbinden könne. Dieſe ſtellen alſo hier das Urſyſtem vor, auf das alle andere Zahlen bezogen werden.

72. So iſt jede Verrichtung der Arithmetik, als Addition, Subtraktion, Multiplikation u. ſ. w. nichts als ein Verfahren, wodurch man nach der Reihe auf die Einheiten, Zehner, Hunderter u. ſ. w. vorge-

ſtellter Zahlen wirkt, wenn ſie ſelbſt zu beträchtlich ſind, als daſs der Geiſt geradezu das ganze Reſultat ihrer Zuſammenſtellung faſſen könne.

73. Eben ſo iſt es mit der Algebra. Ihr Zweck iſt, die Reihe der Verrichtungen anzuzeigen, die vorgenommen werden müſſen und die die Arithmetik ausführen ſoll, um ein geſuchtes Reſultat zu erhalten. Man kennt nicht immer genau den Werth einer Quantität, obgleich man weiſs, daſs ſie von andern gegebenen Quantitäten abhängt, und das Geſetz kennt, nach dem ſie von ihnen abhängt. Um ihn zu finden, muſs man die Hauptfrage auflöſen und auf mehrere einander folgende Verrichtungen zurückführen. Nun iſt es gerade dieſe Reihe von Verrichtungen, deren Natur man kennen, und welche man durch beſtimmte Zeichen anzeigen muſs, und in dieſer Unterſuchung und dieſer Anzeige beſteht die Algebra oder vielmehr die Analyſis, von der die Algebra, um eigentlich zu reden, nur ein Werkzeug oder eine eigenthümliche Sprache iſt.

74. In der Geometrie bietet eine Figur, die aus verſchiedenen geraden und krummen Linien zuſammengeſetzt iſt, die in verſchiedenen Ebenen gezogen ſind, beym erſten Anblick dem Geiſte nur ein verwirrtes Bild dar, und unbeſtimmte Verhältniſſe zwiſchen ihren Theilen. Aber zerlegt man ſie in einfachere Figuren und vergleicht nach der Reihe zwey und zwey, drey und drey, die dahin gehörigen Linien und Winkel, ſo entdeckt man alle theilweiſen Verhältniſſe, die man nachher verbindet, und das Reſultat dieſer Folge von Verbindungen iſt die

Kenntniſs der verſchiedenen Eigenſchaften der aufgeſtellten Figur.

75. In der Analyſis des Unendlichen nimmt man ein feſtes Syſtem von Quantitäten an, um als Maaſsſtab zur Vergleichung zu dienen. Nachher ſtellt man ſich vor, daſs dieſes Syſtem ſich durch unmerkliche Stufen ändere; man betrachtet jede der Quantitäten, die das feſte Syſtem ausmachen, als die Gränze der ihr im veränderlichen Syſtem entſprechenden, und nennt den Unterſchied jeder Veränderlichen von ihrer Gränze unendlich klein. Nachher ſucht man, durch Hülfe der Bedingungen der Aufgabe, Gleichungen zwiſchen den Veränderlichen, ihren Gränzen und ihren Unterſchieden, die unendlich klein genannt werden: man ſchafft dieſe letzten weg, durch eine zufällige Vereinfachung, die dieſer Rechnung eigen iſt, und daher entſteht, daſs dieſe unendlich klein genannten Quantitäten, ſo viel man will, abnehmen, und durch die ſtufenweiſe Annäherung und endliche Coincidenz des veränderlichen und feſten Syſtems zugleich verſchwinden können. Endlich bleiben die geſuchten Gleichungen zwiſchen den Veränderlichen und ihren Gränzen nach, d. h. zwiſchen dem Syſtem, deſſen Eigenſchaften man ſucht, und dem Urſyſtem, das als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt.

76. Die Unterſuchung über direkte und inverſe Gröſsen, die wir hier abhandeln, hat viel Analogie mit dem, was eben über Analyſis des Unendlichen geſagt iſt. Man nimmt eben ſo ein fixes Syſtem an, um als Maaſsſtab zur Vergleichung zu dienen; man betrachtet jede der Gröſsen, die es ausmachen, als

die Gränze der ihr im veränderlichen Syſtem entſprechenden, oder den Ausdruck, auf den man ſie beſtändig während der Veränderung bezieht; man nimmt den Unterſchied von zwey beliebigen Gröſsen des vorgeſtellten Syſtems, und man vergleicht dieſen Unterſchied mit dem ihrer beyderſeitigen Gränzen, indem man immer nur die abſoluten Werthe der einen ſowohl wie der andern betrachtet. So lange dieſe Veränderlichen mit ihren Gränzen in direkter Ordnung ſind, d. h. ſo lange die gröſsere von dieſen beyden Veränderlichen, der gröſseren ihrer Gränzen entſpricht, wird der Unterſchied dieſer Veränderlichen in direkter Bedeutung genannt; gehen aber dieſe Veränderlichen zur inverſen Ordnung über, d. h. wird die, die der gröſsern Gränze entſpricht, kleiner als die, welche der kleineren Gränze entſpricht, ſo heiſst ſie in inverſer Bedeutung. Denn um die Eigenſchaften des vorgeſtellten Syſtems zu finden, fängt man damit an, die Eigenſchaften des feſten Syſtems zu ſuchen, das als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt, und hat man die Formeln, die ſie ausdrücken, gefunden, ſo eignet man ſie für das correlative, vorgeſtellte Syſtem, indem man für die Quantitäten, die das feſte Syſtem ausmachen, die Werthe der Correlation des neuen ſetzt, d. h. indem man mit den erſtern, ſowohl in Hinſicht auf abſoluten Werth, als auf Zeichen, die Veränderungen vornimmt, welche der Unterſchied des Weſens dieſer Syſteme erfordert.

77. Ich ſchlieſse dieſen erſten Abſchnitt mit einer Bemerkung, die mir ſehr wichtig ſcheint. Ich habe ſchon geſagt, daſs die Regeln für die Zuſammenſtel-

lung der Zeichen in algebraiſchen Verrichtungen nur bewieſen werden können, wenn dieſe Verrichtungen ausführbar ſind; daſs z. B. es nicht möglich iſt, auf eine genugthuende Art zu beweiſen, daſs

$$-a \,.\, -a = a^2.$$

In dieſem Fall alſo, und in allen Fällen, wo die Verrichtungen, die ausgeführt werden ſollen, ſich nicht mit wahren Quantitäten beſchäftigen, d. h. mit wirklichen und poſitiven, kann man ſie nur precär gebrauchen. Ich darf ſelbſt hinzufügen, daſs ſie dann Ausnahmen unterworfen ſind, und daſs z. B. in dieſen Fällen *minus* durch *minus* multiplicirt, nicht immer *plus* giebt.

Wir wollen $\surd(a-b) \,.\, \surd(a-b)$ annehmen, ſo haben wir nach den Regeln für die Zuſammenſtellung der Zeichen

$$\surd(a-b) \,.\, \surd(a-b) = \surd(a^2 - 2ab + b^2).$$

Eine Gleichung, die bey allen Werthen von $a$ und $b$ ſtatt haben muſs, ſo lange $a > b$, d. h. ſo lange $a-b$ eine wahre Quantität iſt. Wäre dieſe Regel auf negative wie auf poſitive Quantitäten anwendbar, ſo würde dieſelbe Gleichung beſtehen, wenn $a$ kleiner als $b$ würde; das iſt aber nicht der Fall: denn wenn wir zum Beyſpiel $a = 0$ annehmen, ſo bringt man die Gleichung auf

$$\surd -b \,.\, \surd -b = \surd + b^2 = b.$$

Dieſs iſt aber falſch: denn, wie jeder weiſs, iſt

$$\surd -b \,.\, \surd -b = -b.$$

Die Regel der Zeichen iſt alſo in dieſem Fall einer Ausnahme unterworfen.

Eben so ist $2 \log a = \log a^2$, so lange $a$ eine wirkliche Quantität ist. Wäre die Regel auf negative Quantitäten anwendbar, so hätte man

$$2 \log -a = \log (-a)^2 = \log a^2,$$

also

$$2 \log -a = 2 \log a,$$

oder

$$\log -a = \log a,$$

welches falsch ist, und aus diesem Irrthum ist der Streit über die Logarithmen der negativen Quantitäten entstanden.

Also sind die Regeln der Algebra Ausnahmen unterworfen, wenn die Verrichtung nicht an wahren Quantitäten vorgenommen wird; also giebt es kein Mittel *a priori*, die Regeln der Analysis zu beweisen, die ohne Unterschied positive, negative oder eingebildete Grösen behandelt. Also kann ihr Verfahren nie durch Uebereinstimmung der Resultate der Synthesis gerechtfertigt werden, und durch das Vertrauen, was die beständige Genauigkeit ihrer verificirten Resultate geben mus. Deswegen suchten die ersten Mathematiker, die von ihr Gebrauch machten, immer die Kette der erkennbaren oder synthetischen Wahrheiten wieder anzuknüpfen, wenn sie ihren Gegenstand durch die Kette der hieroglyphischen oder analytischen Wahrheiten erreicht hatten.

## Zweyter Abſchnitt.

### Darſtellung der Art, die Correlation verſchiedener Figuren und die jedesmaligen Stellungen der verſchiedenen Theile einer Figur zu finden.

78. Was ich im erſten Abſchnitte geſagt habe, betrifft alle Arten von Quantitäten; jetzt will ich es verſuchen, dieſe allgemeinen Grundſätze auf geometriſche Quantitäten insbeſondere anzuwenden.

In dieſem Abſchnitt will ich eine Art ſuchen, die geeignet ſey, ſowohl durch die gewöhnlichen Zeichen der Algebra, als auch durch andere Merkmahle, über die man eins geworden iſt, und durch ſyſtematiſche Anordnung der Buchſtaben, durch welche man die merkwürdigen Punkte einer Figur ausdrückt, ſowohl die Correlation verſchiedener Figuren darzuſtellen, die auf ein Urſyſtem bezogen werden können, als auch die jedesmalige Stellung der Punkte, Linien, Winkel, Flächen u. ſ. w., die zur Zuſammenſetzung eines jeden gehören, zu bezeichnen.

Wir wollen zwey beliebige Syſteme annehmen, die aus einer gleichen Zahl von Punkten beſtehen, welche aber verſchieden geordnet ſind. Nun wollen wir eins mit dem andern vergleichen, und die Punkte des erſten, in welcher Ordnung man will, mit den Punkten des zweyten. Sich entſprechende Punkte ſollen die heiſsen, die ſo zwey und zwey verglichen ſind, einer im erſten, der andere im zweyten Syſtem.

Ferner wollen wir annehmen, daſs in jedem von dieſen Syſtemen man dieſelbe Zahl gerader Linien ziehe, dieſelbe Zahl von Umkreiſen beſchreibe, ſie durch dieſelbe Zahl von Ebenen ſchneide, indem man immer dieſe geraden Linien, Umkreiſe und Ebenen durch ſich entſprechende Punkte führt, und daſs endlich alles auf einer Seite ausgeführte es eben ſo auf der andern ſey. Es iſt leicht einzuſehen, daſs zwey ähnliche Syſteme zu denen gehören, die ich correlative Syſteme oder correlative Figuren genannt habe; Punkte, Linien, Winkel, Bogen, Flächen, Maaſse, die daraus entſpringen, und die auf gleiche Art in beyden Syſtemen begründet ſind, werde ich eben ſo ſich entſprechend nennen. Endlich nenne ich diejenigen Funktionen, Formeln, Gleichungen correlativ, die ihm analoge Eigenſchaften ausdrücken. Alle dieſe Begriffe treffen augenſcheinlich mit denen überein, die wir ſchon im erſten Abſchnitte entwickelt haben.

Die correlativen Figuren ſind deswegen nicht ähnliche; denn ſind ſie gleich aus derſelben Anzahl ſich entſprechender Theile zuſammengeſetzt, ſo kön-

nen dieſe Theile doch verſchiedene Verhältniſſe haben. Auch die correlativen Punkte ſind nicht Punkte, die auf ähnliche Art in verſchiedenen Syſtemen geordnet ſind, weil man ſie willkührlich ſtellen kann. Sind dieſe Punkte aber ähnlich geſtellt, ſo kann man ſagen, daſs zwiſchen den beyden Syſtemen eine Correlation der Aehnlichkeit iſt. Eben ſo kann man die Correlation der Symmetrie unterſcheiden, wenn die verglichenen Figuren *) in der That ſymmetriſch ſind, und endlich die Correlation der Identität oder der Congruenz, wenn die beyden Figuren durchaus ähnlich und gleich unter einander ſind.

Weil die Grundlage von jedem dieſer Syſteme eine Vereinigung von Punkten iſt, die in gleicher Anzahl in dem einen, wie in dem andern ſind, ſo können wir uns vorſtellen, daſs, indem das eine von dieſen Syſtemen feſt und als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt, das andere ſich unmerklich verändere, ſo daſs jeder von ſeinen Punkten ſtufenweiſe ſich dem entſprechenden Punkte im andern Syſteme nähere, und endlich in ihn falle, ſo daſs dann die beyden Syſteme ſich vermiſchen und identiſch werden würden. Eben ſo kann man ſich vorſtellen, daſs, wenn zwey Syſteme gleich anfangs identiſch gemacht ſind, eines von ihnen feſt bleibe, und das andere ſich unmerkbar davon entferne, indem es

*) Den wahren Begriff von ſymmetriſchen Figuren hat Legendre in ſeiner Geometrie aufgeſtellt. A. d. Vf.

*L. VI. def. XVI. p.* 163. u. *Not.* 1. *p.* 275.
A. d. Ueb.

ſtufenweiſe ſeine Geſtalt verändert, und indem jeder Punkt eine Stellung annimmt, die mehr oder minder der ähnlich iſt, die er im Urſyſtem hatte.

Ich nehme alſo an, daſs man die Eigenſchaften irgend einer Figur kenne, die ich als Maaſsſtab zur Vergleichung brauche, und ſuche, welche Modifikationen die Formeln oder Gleichungen erleiden müſſen, die dieſe bekannten Eigenſchaften ausdrücken, wenn man ſie übertragen oder davon die Anwendung auf correlative Figuren machen will.

Wenn man alle correlativen Figuren als verſchiedene Zuſtände eines Urſyſtems betrachtet, das ſich durch unmerkliche Stufen verändert, ſo kann man die gefundenen Formeln als allen andern gehörig anſehen, und man muſs nur, um ſie anzuwenden, in jedem beſondern Falle den verſchiedenen Veränderlichen die ihnen gehörigen abſoluten Werthe geben, und die Zeichen ſo verändern, wie es die Modifikationen, welche das Syſtem erlitten hat, verlangen.

Im Gegentheil, wenn das Urſyſtem und die ſich darauf beziehenden Formeln gegeben ſind, ſo kann man fragen, welches das correlative Syſtem ſey, auf das man dieſe Formeln, ſo oder ſo modificirt, beziehen könne?

Endlich kann man fragen, welche Formeln zu gleicher Zeit auf zwey Syſteme anwendbar ſeyn können, d. h. welche allgemeine Formeln zu gleicher Zeit die, auf jedes dieſer Syſteme insbeſondere anwendbaren, Formeln enthalten können?

79. Um die Correlation zweyer Figuren darzuſtellen, werde ich erſt die Correlation der Punkte,

dann die der Linien, der Winkel, der Bogen, der Flächen u. ſ. w. darſtellen.

In Hinſicht auf die Punkte unterſcheide ich zwey Arten von Correlation, nämlich die Correlation der Conſtruktion, und die Correlation der Stellung. Die Correlation der Conſtruktion iſt die, welche man zwiſchen den Punkten zweyer Figuren aufſtellt, wenn man ſie in der Ordnung ihrer jedesmaligen Conſtruktion betrachtet; die Correlation der Stellung diejenige, die man zwiſchen eben dieſen Punkten aufſtellt, wenn man ſie in der Ordnung betrachtet, nach der ſie auf den ſie enthaltenden correlativen Linien geſtellt ſind.

Es ſeyen z. B. (*Fig.* 9 u. 10.) zwey Dreyecke $ABC$, $A'B'C'$, in welchen ich $A$ und $A'$, $B$ und $B'$, $C$ und $C'$ für wechſelſeitig correlativ nehme. Aus den correlativen Punkten $A$, $A'$ wollen wir auf die entgegengeſetzten Seiten die Perpendikel $\overline{AD}$, $\overline{A'D'}$ fallen laſſen, ſo werden die Punkte $D$, $D'$, in der Ordnung der Conſtruktion, unter einander correlativ ſeyn. Aber wenn wir annehmen, daſs im erſten Dreyeck $ABC$, das als Maaſsſtab zur Vergleichung genommen iſt, $D$ zwiſchen $B$ und $C$ falle, während im zweyten der Punkt $C'$ ſich zwiſchen $B'$ und $D'$ befindet, ſo beſteht die Correlation der Stellung im Ausdruck dieſes Unterſchiedes.

Um die Correlation der Conſtruktion aufzuſtellen, iſt es genug, die Reihe der Punkte, die jede Figur beſtimmen, hinzuſchreiben, indem man ſie in derſelben Ordnung unter einander, jeden unter den ihm entſprechenden ſetzt, wie hier.

Correlation der Conſtruktion.

1ſtes Syſtem . . . . . $A\ B\ C\ D$

2tes Syſtem . . . . . $A'\ B'\ C'\ D'$.

Daraus ſeh' ich, daſs in der Ordnung der Conſtruktion $A'$ dem Punkte $A$, $B'$ dem Punkte $B$ u. ſ. w. entſpricht. Jetzt wollen wir auch die Correlation der Stellung darſtellen. Hier ſehe ich, daſs, um dieſe Correlation auszudrücken, man nothwendig anzeigen muſs, daſs $D$ in der erſten Figur ſich auf der geraden Linie $\overline{BC}$ zwiſchen $B$ und $C$ befindet; in der zweyten aber $D'$ ſich auf $\overline{B'C'}$ ſo befindet, daſs $C'$ zwiſchen $B'$ und $D'$ liegt. Um dieſe Modifikation anzuzeigen, iſt es genug, die zwey Reihen der ſich entſprechenden Punkte, nach der Ordnung, in der ſie auf den correlativen Grundlinien $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$ geſtellt ſind, hinzuſchreiben:

1ſtes Syſtem . . . . . $\overline{B\ D\ C}$

2tes Syſtem . . . . . $\overline{B'\ C'\ D'}$.

Die Linien, welche über dieſen Reihen von Punkten gezogen ſind, zeigen an, daſs die Punkte auf geraden Linien geſtellt ſind.

Auf eben die Art drücke ich die Correlation der Stellung zweyer Reihen von Punkten aus, die auf correlativen Bogen einer Curve liegen, nur mit dem Unterſchiede, daſs ich darüber eine krumme Linie ſtatt einer geraden ziehe; ſo daſs, wenn $A$, $B$, $C$, $D$ vier Punkte ſind, die auf dem Bogen eines Cirkels in der Ordnung $A$, $B$, $C$, $D$ liegen, während die ihnen entſprechenden $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, auf dem correlativen Cirkelbogen, in der Ordnung $A'$, $C'$, $B'$, $D'$ liegen, man

ihre Correlationen der Conſtruktion und der Stellung ſo ausdrücken kann:

Correlation der Conſtruktion,

1ſtes Syſtem . . . . . $A\ B\ C\ D$

2tes Syſtem . . . . . $A'\ B'\ C'\ D'$.

Correlation der Stellung,

1ſtes Syſtem . . . . $\overset{\frown}{A\ B\ C\ D}$

2tes Syſtem . . . . $\overset{\frown}{A'\ C'\ B'\ D'}$.

80. Ueberhaupt um eine gerade Linie zu bezeichnen, ziehe ich eine gerade Linie über den Buchſtaben, die ihre Punkte andeuten, und um einen Bogen einer Curve zu bezeichnen, ziehe ich über den Buchſtaben, die ihre Punkte andeuten, eine krumme Linie.

So bedeuten

$\overset{\frown}{A\ B}$

$\overset{\frown}{C\ D\ E}$

$\overset{\frown}{B\ C\ D\ F}$

Bogen der Curve, $AB$, $CDE$, $BCDF$ u. ſ. w. Dieſe Ausdrücke beziehen ſich gewöhnlicherweiſe auf Cirkelbogen, weil ein Cirkelbogen die einfachſte Curve iſt, die zugleich als Maaſsſtab zur Vergleichung für andere dient, indem man ſie wie einen Maaſsſtab gebraucht, ihre verſchiedenen Krümmungen zu meſſen.

81. Da nach der Ordnung der Conſtruktion die correlativen Punkte Durchſchnitte der correlativen Linien ſind, ſo werden wir oft ſagen müſſen, daſs der oder der Punkt der Durchſchnitt von den oder den Linien ſey, welches wir auf folgende Art abkürzen können. Um z. B. den Durchſchnittspunkt

zweyer geraden Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ auszudrücken, ſchreibe ich

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD};$$

d. h. die beyden geraden Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, mit einem Punkte zwiſchen den beyden oben gezogenen Linien. So bedeutet dieſe Abkürzung den Punkt des Zuſammentreffens der beyden geraden Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ſo weit es nöthig iſt, verlängert.

Eben ſo, um den Punkt des Zuſammentreffens zweyer Bogen $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ einer Curve auszudrücken, ſchreibe ich

$$\widehat{AB} \cdot \widehat{CD};$$

um den Punkt des Zuſammentreffens einer geraden Linie $\overline{AB}$ mit dem Bogen einer krummen $\widehat{CD}$ zu bezeichnen,

$$\overline{AB} \cdot \widehat{CD} \text{ oder } \widehat{CD} \cdot \overline{AB}.$$

Sind zwey gerade Linien oder zwey Bogen, oder eine gerade Linie und ein Bogen durch die bloſsen Buchſtaben $a$, $b$ ausgedrückt, ſo drückt man ihr Zuſammentreffen ſo aus

$$a \cdot b.$$

So ſieht man, daſs $\overline{F\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$ z. B. die gerade Linie vom Punkte $F$ auf den Durchſchnittspunkt von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gezogen bedeutet und

$$\overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD} \quad \widehat{FG} \cdot \widehat{HK}}$$

die Linie vom Durchſchnittspunkte der Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, nach dem Durchſchnittspunkt der Bogen $\widehat{FG}$, $\widehat{HK}$; daſs ferner

$$\overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD} \quad \widehat{FG} \cdot \widehat{HK}} \cdot \widehat{LM}$$

der Punkt iſt, wo der Bogen $\widehat{LM}$ die gerade Linie

ſchneidet, die vom Durchſchnittspunkte der Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ nach dem Durchſchnittspunkte $\widehat{FG}$, $\widehat{HK}$ gezogen wird. Eben ſo iſt es in andern Fällen. Dieſe einfache Art der Bezeichnung verkürzt auſserordentlich die Abhandlung.

82. Um auszudrücken, daſs zwey Punkte in einander fallen, oder nur ein und derſelbe Punkt ſind, den man auf zwey Arten betrachtet, bezeichne ich ſeinen doppelten Ausdruck durch das Zeichen $\doteq$, das ich Zeichen der Aequipollenz nenne. Z. B. wenn die geraden Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ im Punkte $E$ zuſammentreffen, ſo ſchreibe ich

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \doteq E.$$

Treffen zwey gerade Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ in demſelben Punkte zuſammen, wo ſich zwey Bogen $\widehat{FG}$, $\widehat{HK}$ ſchneiden, ſo ſchreibe ich

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \doteq \widehat{FG} \cdot \widehat{HK}.$$

Ueberhaupt bediene ich mich des Zeichens der Aequipollenz, um die Identität zweyer Gegenſtände auszudrücken. So bedeutet $a \doteq b$, daſs der Werth von $a$ derſelbe iſt, als der von $b$. In dieſem Falle drückt es alſo daſſelbe aus, als $=$; aber das Zeichen der Aequipollenz iſt zu gleicher Zeit auf Punkte und auf alle Gegenſtände anwendbar, die eins für das andere geſetzt werden können.

83. Ich habe ſchon geſagt, wie ich die Bogen von geraden Linien unterſcheide. Eben ſo brauche ich auch die Abkürzung $A\hat{B}C$ für den Winkel $ABC$. Um den Winkel zu bezeichnen, den zwey gerade Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ bilden, ſchreibe ich

$$\overline{AB} \,\hat{}\, \overline{CD}.$$

Eben

Eben so, um den Winkel auszudrücken, den zwey Bogen bey ihrem Durchschnitt machen, schreibe ich

$$\overset{\frown}{AB} \wedge \overset{\frown}{CD}.$$

Für Oberfläche oder Fläche $ABCD$ schreibe ich

$$\overline{\overline{ABCD}}.$$

Um den Winkel auszudrücken, den eine Linie mit einer Fläche macht, schreibe ich

$$\overline{AB} \wedge \overline{\overline{CDEFG}}.$$

Um den Winkel auszudrücken, den zwey Flächen bilden, schreibe ich

$$\overline{\overline{ABC}} \wedge \overline{\overline{DEFG}}.$$

Sind diese Linien oder Flächen durch bloße Buchstaben $a$, $b$, $c$, $d$ bezeichnet, so bezeichne ich die Winkel, die sie bilden, so:

$$a \wedge b, \quad a \wedge c, \quad b \wedge d \text{ u. s. w.}$$

Ich begnüge mich mit dieser kleinen Anzahl Abkürzungen, und werde sie selbst nur im Nothfall gebrauchen; aber man sieht, daſs ihr Gebrauch sehr leicht ist, und daſs sie viel dazu beytragen, einen deutlichen Begriff von den Gegenständen zu geben und die Vergleichung der Gegenstände, die aus verschiedenen Systemen gezogen sind, durch Hülfe der Tafeln der Correlation klar und faſslich machen.

84. Was Linien, Winkel, Bogen, Flächen, körperlichen Inhalt und sonstige Werthe betrifft, muſs man die Correlation der Quantitäten oder absoluten Werthe, und die Correlation der Zeichen unterscheiden.

Man ſtellt die Correlation der abſoluten Werthe auf, wenn man die ſich entſprechenden Quantitäten bloſs eine unter die andere ſchreibt. So z. B. wenn man zwey Syſteme von Quantitäten hat, von denen das eine aus den Quantitäten $A$, $B$, $C$, $D$ u. ſ. w. beſteht, das andere aus den correlativen Quantitäten $a$, $b$, $c$, $d$ u. ſ. w., ſo begründet man ſo die

Correlation der abſoluten Werthe:

1ſtes Syſtem . . . . $A$, $B$, $C$, $D$ u. ſ. w.
2tes Syſtem . . . . $a$, $b$, $c$, $d$ u. ſ. w.

Dieſs wird immer leicht geſchehen können, wenn man nur die vorhin erklärte Correlation der Conſtruktion hat, weil man nur die Punkte zu nehmen braucht, welche dieſe Quantitäten nach derſelben Ordnung der Conſtruktion in den beyden verglichenen Syſtemen beſtimmen.

Bey den Dreyecken $ABCD$, $A'B'C'D'$ (Fig. 9 und 10.), die wir ſchon vorher betrachtet haben, iſt die Correlation der Conſtruktion unter den Punkten:

1ſtes Syſtem . . . . . $ABCD$
2tes Syſtem . . . . . $A'B'C'D'$.

Man kann alſo ohne Schwierigkeit ſchlieſsen, daſs man folgende Correlation zwiſchen den abſoluten Werthen der Linien, der Winkel und der Flächen haben wird.

Correlation der abſoluten Werthe:

1ſtes Syſtem $\left\{\begin{matrix}\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}, \overline{AD}, B\hat{A}C \\ \overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{B'C'}, \overline{B'D'}, \overline{C'D'}, \overline{A'D'}, B'\hat{A}'C'\end{matrix}\right.$
2tes Syſtem

$$\left\{\begin{matrix}A\hat{B}C, A\hat{C}B, B\hat{A}D, C\hat{A}D, \overline{\overline{ABC}}, \overline{\overline{ABD}}, \overline{\overline{ACD}}. \\ A'\hat{B}'C', A'\hat{C}'B', B'\hat{A}'D', C'\hat{A}'D', \overline{\overline{A'B'C'}}, \overline{\overline{A'B'D'}}, \overline{\overline{A'C'D'}}.\end{matrix}\right.$$

Das geſchieht, wenn man gleich anfangs in einer Folge die Reihe aller Quantitäten des erſten Syſtems ſchreibt, die man mit denen des zweyten vergleichen will; und dann unter jeder von ihnen die Reihe der entſprechenden Buchſtaben, welche die entſprechenden Quantitäten des zweyten Syſtems beſtimmen.

So beſtimmen die beyden erſten Buchſtaben $A$, $B$, die man aus der Correlation der Punkte nimmt, nach der Reihe geſchrieben, die gerade Linie $\overline{AB}$: die ihnen entſprechenden Buchſtaben $A'$, $B'$ des zweyten Syſtems nach der Reihe geſchrieben, die gerade Linie $\overline{A'B'}$, welche mit $\overline{AB}$ correlativ iſt. Auf gleiche Weiſe beſtimmen der zweyte, der erſte und der vierte Buchſtabe des erſten Syſtems nach einander geſchrieben den Winkel $B\hat{A}D$; der zweyte, der erſte und der vierte Buchſtabe des zweyten Syſtems in derſelben Ordnung nach einander geſchrieben den correlativen Winkel $B'\hat{A}'D'$ dieſes zweyten Syſtems, d. h. $B\hat{A}D$ und $B'\hat{A}'D'$ ſind correlative Quantitäten. Eben ſo iſt es mit den andern.

Man ſieht daraus, daſs im Allgemeinen die Correlation der Quantitäten oder abſoluten Werthe nur von der Correlation der Conſtruktion abhängt.

85. Hat man die Correlation der Conſtruktion aufgeſtellt, ſo geht man zur Correlation der Zeichen; dieſe hängt von der Correlation der Stellung ab.

Z. B. in den vorher verglichenen Dreyecken war die Correlation der Stellung der Punkte (79):

1ſtes Syſtem . . . . . $\overline{BDC}$

2tes Syſtem . . . . . $\overline{B'C'D'}$.

Ich ſehe, daſs eine Inverſion zwiſchen den Punkten $D$, $C$ und den ihnen entſprechenden $D'$, $C'$ vorgegangen iſt; d. h. daſs ſie ihre Ordnung verändert haben. Daraus ſchlieſse ich, daſs die beyden Syſteme nur indirekt correlativ ſind. Man muſs alſo nach der Reihe ſuchen, welche Quantitäten direkt geblieben, und welche invers geworden ſind, und den erſtern +, den andern — als Zeichen der Correlation geben.

In Hinſicht auf das Syſtem, welches als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen wird, habe ich ſchon geſagt, daſs die Quantitäten, die es ausmachen, an ſich gar keine Zeichen haben, weil es bloſse abſolute Werthe ſind, aber daſs, wenn man das Urſyſtem als das erſte correlative Syſtem anſieht, man ihnen das Zeichen + geben kann (52).

86. Iſt die Correlation der Zeichen aufgeſtellt, ſo leitet man daraus die Werthe der Correlation, weil ſie aus den abſoluten Werthen mit ihren Zeichen zuſammengenommen beſtehen. Wir wollen alſo dieſe Werthe der Correlation nach der Folge für jede der Quantitäten aufſtellen, welche die beyden verglichenen Syſteme ausmachen. Hier iſt das Reſultat, welches ich gleich nachher beweiſen werde.

## Allgemeine Tafel der Correlation beyder Syſteme.

| | |
|---|---|
| 1ſtes Syſtem | $+\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CD}$ |
| 2tes Syſtem | $+\overline{A'B'} + \overline{A'C'} + \overline{B'C'} + \overline{B'D'} - \overline{C'D'}$ |
| | $+\overline{AD} + B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{A}D + C\hat{A}D$ |
| | $+\overline{A'D'} + B'\hat{A}'C' + A'\hat{B}'C' + A'\hat{C}'B' + B'\hat{A}'D' - C'\hat{A}'D'$ |
| | $+\overline{\overline{ABC}} + \overline{\overline{AB}}\,\overline{\overline{D}} + \overline{\overline{AC}}\,\overline{\overline{D}}.$ |
| | $+\overline{\overline{A'B'C'}} + \overline{\overline{A'B'}}\,\overline{\overline{D'}} - \overline{\overline{A'C'}}\,\overline{\overline{D'}}.$ |

Um dieſe Tafel der Correlation zu beweiſen, ſtelle ich mir vor, daſs das Urdreyeck $ABCD$ ſich in $A'B'C'D'$ durch die Bewegung des Punktes $C$ auf $\overline{CB}$ verändere, vermöge deren er ſich zwiſchen $B$ und $D$ ſtellt. Dieſs feſtgeſetzt, ſo ſehe ich, daſs bey dieſer Bewegung keine von den Quantitäten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ weder durch o noch durch $\infty$ geht. Alſo ſind dieſe Quantitäten im zweyten Syſteme direkt (49); alſo iſt das Zeichen der Correlation für jede von ihnen in dieſem zweyten Syſteme $+$, wie es auch die Tafel angiebt. Im Gegentheil geht $\overline{CD}$, um $\overline{C'D'}$ zu werden, durch o in dem Augenblicke, wo $C$ in $D$ fällt. Dieſe Quantität kann alſo invers werden, und wird es in der That, denn im Urſyſtem hat man $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD}$, und im umgeformten Syſteme im Gegentheil $\overline{C'D'} = \overline{B'D'} - \overline{B'C'}$. Alſo iſt das Zeichen der Correlation für $C'D'$ —, wie es die Tafel auch zeigt.

Eben ſo geht offenbar während der Bewegung des Punktes $C$ keine der Quantitäten $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $B\hat{A}D$, $\overline{\overline{ABC}}$, $\overline{\overline{ABD}}$ weder durch o, noch durch $\infty$.

Alſo iſt das Zeichen der Correlation für jede von ihnen im umgeformten Syſteme +; aber $C\hat{A}D$, $\overline{ACD}$ verſchwanden beyde in dem Augenblicke, wie $C$ in $D$ fiel: dieſe beyden Quantitäten können alſo invers geworden ſeyn, und das iſt in der That der Fall, denn im erſten Syſtem hat man $C\hat{A}D = B\hat{A}C - B\hat{A}D$, und im Gegentheil im umgeformten Syſtem $C'\hat{A}'D' = B'\hat{A}'D' - B'\hat{A}'C'$. Eben ſo hat man im erſten Syſteme $\overline{ACD} = \overline{ABC} - \overline{ABD}$; und im zweyten im Gegentheil $\overline{A'C'D'} = \overline{A'B'D'} - \overline{A'B'C'}$. Alſo ſind die Quantitäten $C'\hat{A}'D'$, $\overline{A'C'D'}$ invers; alſo iſt ihr Zeichen der Correlation —, wie es die Tafel giebt. Alſo ſtellt dieſe Tafel genau die Correlation der beyden vorgeſtellten Syſteme vor.

Es folgt daraus, daſs, wenn die Eigenſchaften des Urdreyecks auf irgend eine Art durch Formeln ausgedrückt wären, oder durch Verhältniſſe oder Gleichungen, die nur die in der Tafel aufgerechneten Quantitäten enthalten, man, um dieſe Formeln auf das umgeformte Syſtem anwendbar zu machen, für jeden der darin befindlichen Werthe bloſs den Werth der Correlation, der ihm im umgeformten Syſtem entſpricht, zu ſetzen brauchte (25).

Man weiſs z. B., daſs in jedem Dreyecke, wo man einen Perpendikel aus einem Winkel auf die gegenüberſtehende Seite fallen lieſs, wenn dieſer Perpendikel auf die Seite ſelbſt fällt, folgendes Verhältniſs hat.

Die Seite, auf welche der Perpendikel herabgelaſſen iſt, verhält ſich zu der Summe der beyden

andern Seiten, wie der Unterſchied dieſer beyden andern Seiten ſich zum Unterſchied der Segmente verhält.

Aus dieſem Verhältniſs erhalte ich für das Urſyſtem

$$\overline{BC} : \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AB} - \overline{AC} : \overline{BD} - \overline{CD}.$$

Um dieſs Verhältniſs auf das umgeformte Syſtem anzuwenden, ſetze ich die aus der Tafel genommenen correlativen Werthe darin, ſie haben alle + als Zeichen der Correlation, ausgenommen $\overline{C'D'}$. Ich verändere alſo bloſs das Zeichen von $\overline{C'D'}$ und mein Verhältniſs wird:

$$\overline{B'C'} : \overline{A'B'} + \overline{A'C'} = \overline{A'B'} - \overline{A'C'} : \overline{B'D'} + \overline{C'D'}.$$

Man hat alſo, wenn der Perpendikel auſserhalb des Dreyecks fällt, folgendes Verhältniſs:

Die Seite, auf welche der Perpendikel fällt, verhält ſich zur Summe der beyden andern Seiten wie der Unterſchied dieſer Seiten zur Summe der Segmente.

Derſelbe Fall würde mit jedem neuen Dreyecke eintreten, auf das man dieſelben Formeln anwenden wollte: man brauchte nur, wie ich gezeigt habe, die Correlation der beyden Syſteme aufzuſtellen, welche offenbar direkt ſeyn wird, wenn der Perpendikel des neuen Dreyecks auf die ihm gegenüberſtehende Seite ſelbſt fällt, und indirekt, wenn dieſer Perpendikel nur auf die Verlängerung dieſer Seite fällt.

In dieſem letzten Fall könnte man als Urſyſtem das annehmen, was ich als umgeformtes Syſtem betrachtet habe; d. h. dieſs als Maaſsſtab zur Vergleichung für das neue Dreyeck nehmen, ſo wird die Correla-

tion direkt seyn; d. h. die Zeichen werden dieselben in den Formeln des neuen Systems seyn, die sie in den Formeln sind, welche wir für das eben betrachtete System $A' B' C' D'$ gefunden haben.

87. Zwey gerade Linien, die sich schneiden, bilden vier verschiedene Winkel, die man ja nicht verwechseln muss, wenn man zwey oder mehr correlative Figuren vergleicht. Deswegen will ich mich jetzt mit der Art beschäftigen, wie man den Unterschied dieser Winkel in der Rechnung anzeigen kann.

Gleich anfangs zeige ich die Richtung einer geraden Linie an, indem ich zwey beliebige Punkte dieser geraden Linie nenne, und den zuerst setze, von dem man annimmt, dass er die Linie durch seine Bewegung gezogen habe. So, wenn man annimmt, dass der Punkt $m$ (*Fig.* 11.) durch seine Bewegung eine gerade Linie beschrieben habe, indem er von $m$ nach $n$ ging, zeigt $\overline{mn}$ das an, was ich die Richtung dieser geraden Linie nenne, und $m$, was ich unter dem Ausdruck, erster Punkt oder Entstehungspunkt, bezeichne. Im Gegentheil bezeichnet $\overline{nm}$ die diametral entgegengesetzte Richtung.

Ich sage, dass zwey gerade Linien in derselben Richtung gezogen sind, wenn sie parallel sind, und noch mehr, wenn man ihre Richtungen in einander fallen lassen kann, wenn man sich vorstellt, dass eine von den beyden, parallel mit sich selbst, sich so bewege, dass ihr Entstehungspunkt in den Entstehungspunkt der andern falle.

Durch den Winkel, den zwey beliebige gerade Linien bilden, wenn sie von einem Punkte ausgehen, verstehe ich blos den Winkel, den in der That ihre Richtungen bilden, indem ich den ihnen gemeinschaftlichen Punkt als Entstehungspunkt einer jeden annehme. Wenn $\overline{nn'}$ und $\overline{pp'}$ sich in $m$ durchschneiden und ich den Winkel $n\hat{m}p$ bezeichnen will, so nenne ich ihn den durch $\overline{mn}$, $\overline{mp}$ gebildeten Winkel, nicht durch $\overline{mn}$, $\overline{pm}$, und eben so wenig durch $\overline{nm}$ und $\overline{mp}$ gebildet. Er wird bezeichnet

$$n\hat{m}p \text{ oder } \overline{mn}\hat{}\overline{mp}.$$

Hierdurch kann man die vier Winkel, welche die geraden Linien $\overline{nn'}$, $\overline{pp'}$ bilden, leicht unterscheiden, weil nach dem vorigen Begriff man

$$n\hat{m}p \neq \overline{mn}\hat{}\overline{mp} \text{ hat, und}$$
$$n\hat{m}p' \neq \overline{mn}\hat{}\overline{mp'}$$
$$p'\hat{m}n' \neq \overline{mp'}\hat{}\overline{mn'}$$
$$p\hat{m}n' \neq \overline{mp}\hat{}\overline{mn'}.$$

Weil die Scheitelwinkel gleich sind, so hat man z. B. $n\hat{m}p = p'\hat{m}n'$, und folglich $\overline{mn}\hat{}\overline{mp} = \overline{mp'}\hat{}\overline{mn'}$. So sind diese beyden Winkel, in Hinsicht auf ihre absoluten Werthe, identisch, aber nicht in Hinsicht auf ihre Stellung.

Zwey Nebenwinkel im Gegentheil sind wechselseitige Supplemente. So hat man

$$\overline{mn}\hat{}\overline{mp'} = 2s - \overline{mn}\hat{}\overline{mp},$$

wenn man den vierten Theil des Umkreises oder den rechten Winkel $s$ nennt.

Statt die vorigen Winkel, wie eben gesagt ist, zu bezeichnen, indem man immer vom Durchschnittspunkte $m$ ausgeht, kann man auf folgende Art den

Ausdruck allgemeiner machen. Um den Winkel $n\hat{m}p$ zu bezeichnen, ſchreibt man überhaupt

$$\overline{n'n}\ \ \overline{p'p},$$

indem man $n'$ willkührlich auf der Richtung $\overline{mn}$, und $p'$ willkührlich auf der Richtung $\overline{mp}$ annimmt, doch ſo, daſs die Richtungen $\overline{n'n'}$, $\overline{p'p'}$ dieſelben ſeyen, als $\overline{mn}$, $\overline{mp}$. So werden die vier Winkel, die durch die zwey geraden Linien $\overline{nn'}$, $\overline{pp'}$ gebildet werden, ſo unterſchieden,

$$\begin{aligned}
n\hat{m}p &\ddagger \overline{n'n}\hat{}\overline{p'p}\\
n\hat{m}p' &\ddagger \overline{n'n}\hat{}\overline{pp'}\\
p'\hat{m}n' &\ddagger \overline{pp}\hat{}\overline{nn'}\\
p\hat{m}n' &\ddagger \overline{p'p}\hat{}\overline{nn'}.
\end{aligned}$$

Ich dehne dieſe Begriffe auf den Fall aus, wenn die verglichenen geraden Linien nicht in einer Ebene ſeyn ſollten, dann nenne ich den Winkel, der durch dieſe beyden Linien gebildet wird, den, der zwiſchen zwey andern geraden Linien ſtatt hätte, die nach der Richtung der erſten, von irgend einem im Raum angenommenen Punkte aus, gezogen würden.

Ueberhaupt, wenn man zwey im Raum gezogene Linien durch $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ bezeichnet, ſo wird der Winkel, den ſie bilden, durch $\overline{AB}\hat{}\overline{CD}$ bezeichnet, der ihm gleiche Scheitelwinkel durch $\overline{BA}\hat{}\overline{DC}$, und die zwey Supplementswinkel, die auch gleich ſind, durch $\overline{AB}\hat{}\overline{DC}$ und $\overline{BA}\hat{}\overline{CD}$. Man hat alſo immer, wenn der rechte Winkel $*$ heiſst,

$$\begin{aligned}
\overline{AB}\hat{}\overline{CD} &= \overline{BA}\hat{}\overline{DC}\\
\overline{AB}\hat{}\overline{DC} &= \overline{BA}\hat{}\overline{CD}\\
\overline{AB}\hat{}\overline{CD} + \overline{AB}\hat{}\overline{DC} &= 2*\\
\overline{AB}\hat{}\overline{CD} + \overline{BA}\hat{}\overline{CD} &= 2*.
\end{aligned}$$

Alle dieſe Gleichungen entſtehen augenſcheinlich durch einen einfachen Mechanismus in der ſyſtematiſchen Anordnung und Verſetzung der Buchſtaben, durch den man, wenn man mit ihm vertraut geworden iſt, der Mühe überhoben wird, die Augen ſo oft auf die Figur zu werfen. Nun weiſs man, daſs es ein groſser Vortheil der Analyſis iſt, daſs, wenn einmal die Quantitäten durch Buchſtaben oder ſonſtige Charaktere bezeichnet ſind, man ſich nicht mehr mit der vorgeſtellten Sache ſelbſt, ſondern nur mit ihrem Symbol zu beſchäftigen braucht.

Es iſt klar, daſs man dieſelben Begriffe auf Winkel, die durch beliebige Ebenen gebildet ſind, anwenden kann, indem man dieſe Ebenen durch gerade Linien, die in ihnen ſelbſt gezogen ſind, bezeichnet, und welche aus einem Punkte ihres gemeinſchaftlichen Durchſchnitts perpendikular auf dieſem Durchſchnitte ſelbſt errichtet ſind.

88. Da wir oft Gelegenheit haben werden, von den Winkeln zu ſprechen, welche die Seiten eines Vielecks unter ſich ſelbſt oder mit feſten Linien bilden, die als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen ſind, ſo iſt es nothwendig, in dieſer Hinſicht die nöthigen Erklärungen zu geben, um jeder Zweydeutigkeit zuvor zu kommen.

Man hat angenommen, daſs, wenn man bloſs von den Winkeln eines Vielecks ſpricht, man immer die verſteht, die zwey an einander liegende Seiten bilden, indem man als den Entſtehungspunkt von jedem den ihnen gemeinſchaftlichen Punkt annimmt.

So ſind im Vieleck $ABCDE$ (*Fig.* 12.) die Winkel des Vielecks

$$\overline{AB}\hat{}\overline{AE}$$
$$\overline{BA}\hat{}\overline{BC} \text{ u. ſ. w.}$$

Aber man muſs dieſe Winkel des Vielecks von denen unterſcheiden, die ich Winkel durch die Richtung des Umfanges gebildet nennen werde, ſie mögen dieſs nun durch die Seiten unter einander, oder durch die Seiten und eine feſte gerade Linie ſeyn, die als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt.

Hier muſs man ſich vorſtellen, daſs ein beweglicher Punkt, indem er von einem Scheitel des Vielecks, z. B. $A$, ausgeht, das Vieleck beſchreibe, wobey er immer der Richtung des Umfangs folgt, bis er wieder zu dem Scheitel gekommen iſt, von dem er ausging, dann ſchreibt man jeder der Seiten die Richtung des beſchreibenden Punktes zu, und der Winkel, den die Richtungen zweyer Seiten ſo genommen bilden, heiſst der Winkel nach der Richtung des Umfangs. So iſt z. B. der Winkel nach der Richtung des Umfangs, von den Seiten, die ſich in $B$ ſchneiden, gebildet, nicht $A\hat{B}C$, welches der Vieleckswinkel iſt; ſondern $A'\hat{B}C'$, welcher durch die Richtungen $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ gebildet iſt, oder

$$\overline{AB}\hat{}\overline{BC} = 2\pi - \overline{BA}\hat{}\overline{BC}.$$

Man ſieht alſo, daſs in einem Vieleck, welches keine zurückgehende Winkel hat, der nach der Richtung des Umfangs gebildete Winkel, das Supplement des Vieleckswinkels, oder das, was man äuſseren Winkel nennt, iſt.

Der Unterſchied zwiſchen Vielecks-winkel und dem Winkel nach der Richtung des Umfangs findet bey allen Arten von Vielecken ſtatt; die Winkel mögen austretend oder zurückgehend, das Vieleck mag eben oder gebogen ſeyn, d. h. ſeine Seiten mögen in derſelben Ebene liegen oder nicht. Eben ſo verſteht man, was der Winkel durch zwey Seiten gebildet ſagen will, dieſe Seiten mögen an einander liegen oder durch andere getrennt ſeyn, die folglich nicht in derſelben Ebene ſeyn können.

Der Winkel nach der Richtung des Umfangs durch die verſchiedenen Seiten des Vielecks und eine beliebige feſte gerade Linie gebildet, heiſst der, der ſtatt haben würde, wenn man ſich durch den Entſtehungspunkt dieſer feſten geraden Linie eine mit dieſer Seite parallel laufende Linie gezogen vorſtellte, die zugleich nach derſelben Richtung liefe, welche man ſich als die des Umfangs vorſtellt. Dieſe Richtung des Umfangs iſt willkührlich gewählt; iſt ſie aber einmal beſtimmt, ſo muſs ſie dieſelbe für alle Seiten des Vielecks ſeyn, eben ſo wie die gerade Linie, die man als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen hat.

Man kann auch als feſte Linie eine von den Seiten des Vielecks ſelbſt nehmen, aber dann muſs man immer einen Unterſchied machen, zwiſchen der Richtung dieſer Linie, wenn man ſie als Maaſsſtab zur Vergleichung betrachtet, und derſelben Linie, wenn man ſie als Seite des Vielecks betrachtet; denn man kann die Richtung des Umfangs ohne die Richtung der feſten Linie ändern, und umgekehrt. So kann

dieſe feſte Linie und die Seite des Vielecks, auf der ſie genommen iſt, nach Gefallen entweder nach einer und derſelben oder nach einer diametral entgegengeſetzten Richtung gehen.

89. Wenn ich in der Folge von dem Winkel ſprechen werde, welcher durch die Seiten des Vielecks unter ſich oder mit andern feſten Linien gebildet wird, ſo verſtehe ich immer den Vieleckswinkel darunter, d. h. den Winkel, der durch dieſe beyden Linien gebildet wird, wenn man ihren Durchſchnittspunkt als den Entſtehungspunkt einer jeden anſieht. Will ich den Winkel bezeichnen, der durch dieſe Linien nach der Richtung des Umfangs gebildet wird, ſo werde ich es ausdrücklich anzeigen.

90. Wenn von den Winkeln die Rede iſt, die durch zwey auf einander folgende Seitenflächen eines Polyeders gebildet werden, ſo muſs man ſich aus einem beliebigen Punkte der gemeinſchaftlichen Kante zwey Perpendikularlinien gezogen vorſtellen, die eine in der erſten Seitenfläche, die andere in der zweyten. Der Winkel, der durch dieſe Linien gebildet wird, wenn man den Durchſchnittspunkt als Entſtehungspunkt einer jeden betrachtet, iſt der Winkel des Polyeders, und ſein Supplement wird der Winkel ſeyn, welcher durch die beyden Seitenflächen nach der Richtung der Oberfläche des Polyeders gebildet wird.

Oder was auf eins hinauskommt, man muſs die innere Wand des Polyeders von ſeiner äuſseren unterſcheiden. Der Winkel, der durch die beyden inneren Wände des Polyeders gebildet wird, wenn man als

Entſtehungslinie ihren gemeinſchaftlichen Durchſchnitt annimmt, iſt der Winkel des Polyeders, und ſein Supplement iſt der Winkel, welcher nach der Richtung der Oberfläche des Polyeders gebildet iſt.

Man kann dieſs für die Einbildungskraft deutlicher machen, wenn man z. B. ſich vorſtellt, daſs die innere Wand des Polyeders weiſs, und die äuſseren Seitenflächen ſchwarz ſind, und daſs jede Seitenfläche in's Unendliche verlängert in ihrer ganzen Ausdehnung immer dieſelbe Farbe an derſelben Seite behalte. Dann iſt der Winkel des Polyeders derjenige, der durch die weiſsen Flächen gebildet wird, wenn man ihren gemeinſchaftlichen Durchſchnitt als die Entſtehungslinie beyder annimmt; und der Winkel nach der Richtung der Oberflächen des Polyeders derjenige, welcher durch eine weiſse und eine ſchwarze Fläche gebildet wird, indem man immer annimmt, daſs dieſe Farben nach der Reihe genommen ſind, ohne von den Ebenen unterbrochen zu ſeyn, und daſs ihr Durchſchnitt die Entſtehungslinie der verglichenen Oberflächen ſey.

Auf dieſe Art wird man leichter begreifen, was ein Winkel ſey, der durch zwey nicht auf einander folgende Seitenflächen gebildet wird, es mag ein Winkel des Polyeders, oder ein Winkel nach der Richtung der Oberfläche des Polyeders ſeyn. Eben derſelbe Fall iſt es mit den Winkeln, die durch die Seitenflächen des Polyeders und eine beliebige feſte Ebene gebildet werden, welche man als Maaſsſtab zur Vergleichung annimmt. Man kann irgend eine Seite dieſer feſten unbeſtimmten Ebene ſich weiſs

vorſtellen, und die andere ſchwarz, dann verſteht man unter den Winkeln, die jede der Seitenflächen mit der feſten Ebene bildet, diejenigen, die durch ihre weiſsen Oberflächen gebildet werden, welche nicht durch Ebenen unterbrochen ſind, wobey man ihren gemeinſchaftlichen Durchſchnitt als Entſtehungslinie annimmt. Die Winkel durch die Seitenflächen mit der feſten Ebene, nach der Richtung der Oberfläche des Polyeders gebildet, werden die ſeyn, welche zwiſchen der weiſsen Oberfläche der Ebene und den ſchwarzen Seitenflächen des Polyeders begriffen ſind.

Wie man auch dieſe Unterſchiede erkläre, ſo ſind ſie durchaus nöthig, um nicht die Winkel, von denen man ſprechen will, mit ihren Supplementen zu verwechſeln. Jetzt wollen wir an einigen Beyſpielen den Gebrauch zeigen, den man von den Charakteren oder angenommenen Zeichen, die vorher erklärt ſind, machen kann, um die Verhältniſſe der Stellung zwiſchen den verſchiedenen Theilen derſelben Figur und den Theilen verſchiedener correlativen Figuren unter ſich auszudrücken.

## Erſte Aufgabe.

91. **Die Correlationen der Conſtruktion und der Stellung, welche zwiſchen zwey beliebigen Dreyecken eintreten, darzuſtellen (*Fig.* 13 u. 14.); und zwar ſo, daſs man für eine dieſer Figuren paſſende Formeln gehörig modificiren könne, damit ſie auf die andern anwendbar werden.**

Wir

Wir wollen das Dreyeck $ABC$ als Maafsſtab zur Vergleichung annehmen, und die Punkte $A$, $B$, $C$, die es beſtimmen, in einer beliebigen Ordnung ſchreiben, unter ihnen ebenfalls in beliebiger Ordnung die Punkte $M$, $N$, $P$, die das zweyte beſtimmen, z. B. ſo:

1ſtes Syſtem . . . . . $ABC$
2tes Syſtem . . . . . $MNP$

ſo iſt offenbar die Correlation der Conſtruktion dargeſtellt, und hieraus folgt, daſs man dieſe Correlation auf ſo viel verſchiedene Arten darſtellen kann, als es verſchiedene Arten giebt, die drey Buchſtaben $M$, $N$, $P$ den drey Buchſtaben $A$, $B$, $C$ entſprechend zu machen, d. h. auf ſechs Arten.

Iſt die Correlation der Conſtruktion ſo dargeſtellt, ſo folgt die der abſoluten Werthe leicht daraus, weil, um z. B. die gerade Linie zu finden, die im zweyten Syſtem der geraden Linie $\overline{AC}$ des erſten entſpricht, man nur die beyden Punkte $M$, $P$ zu nehmen braucht, die wechſelſeitig den Punkten $A$, $C$ des erſten entſprechen, d. h. daſs $\overline{MP}$ der Linie $\overline{AC}$ entſpricht. Gleichfalls hat der Winkel $B\hat{A}C$ den entſprechenden Winkel $N\hat{M}P$. Eben ſo iſt es mit den andern.

Es bleibt alſo nur übrig, die Correlation der Stellung aufzuſtellen, von welcher die der Zeichen abhängt. Aber es iſt augenſcheinlich, daſs die Correlation zweyer beliebigen einfachen Dreyecke, wie wir ſie betrachten, d. h. ohne zugefügte Linien (wie z. B. die Perpendikel aus den Winkeln auf die gegenüberſtehenden Seiten ſeyn würden), immer direkt ſeyn muſs, weil eines von den Dreyecken ſich immer

durch unmerkbare Stufen in das andere verwandeln kann, ohne dafs eins von den fechs zu betrachtenden Dingen durch o oder durch ∞ gehe; denn um diefe Veränderung zu bewerkftelligen, braucht man offenbar nur die Seiten gehörig zu vermehren oder zu vermindern.

Alfo find die Formeln, welche die Trigonometrie zur Berechnung eines Dreyecks giebt, auf alle möglichen Dreyecke ohne Veränderung der Zeichen anwendbar, vorausgefetzt, dafs man nur die fechs Dinge, welche bey diefem einfachen Dreyecke zu betrachten find, in die Rechnung bringe, und nicht z. B. die Perpendikel oder die Winkel, welche die Perpendikel mit den anliegenden Seiten bilden.

Man kann auch bemerken, dafs jedes Dreyeck mit fich felbft auf drey verfchiedene Arten durch den Weg der Correlation verglichen werden kann, denn wir können für das Dreyeck *ABC* folgende drey correlative Syfteme aufftellen:

| | |
|---|---|
| 1ftes Syftem . . . . . | *ABC* |
| 2tes Syftem . . . . . | *BAC* |
| 3tes Syftem . . . . . | *ACB*. |

## Zweyte Aufgabe.

92. Die Correlationen der Conftruktion und der Stellung zwifchen zwey Dreyecken *ABCD*, *MNPQ* (*Fig.* 15 u. 16.) aufzuftellen, in deren jedem ein Perpendikel $\overline{AD}$, $\overline{MQ}$ aus einem Winkel auf die gegenüberftehende Seite gefenkt ift.

Wir wollen die Figur *ABCD* als Maafsſtab zur Vergleichung nehmen, und nach der Ordnung der Conſtruktion die vier Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, die die erſte Figur beſtimmen, hinſchreiben; d. h. erſt in einer beliebigen Ordnung die drey Scheitelpunkte *A*, *B*, *C*, indem man z. B. von *A* anfängt, dann *B*, und dann *C*, und zuletzt den Punkt *D* ſetzt, wo der Perpendikel auf die entgegengeſetzte Seite *BC* fällt.

Darunter wollen wir die entſprechenden Buchſtaben der correlativen Figur *MNPQ* ſchreiben; indem wir derſelben Ordnung der Conſtruktion folgen, oder vom Punkte *M* anfangen, von dem der Perpendikel herabgelaſſen iſt, dann zu *N*, dann zu *P*, und endlich zu *Q* gehen, wo der Perpendikel auf die gegenüberſtehende Seite fällt, wie in der Urfigur.

Dieſe Anordnung giebt uns augenſcheinlich die Correlation der Conſtruktion der beyden Figuren, wie folgt:

| | |
|---|---|
| 1ſtes Syſtem . . . . . | *ABCD* |
| 2tes Syſtem . . . . . | *MNPQ*. |

Statt *N* als den *B* entſprechenden, *P* als den *C* entſprechenden Punkt zu betrachten, hätten wir auch augenſcheinlich *P* als den *B* entſprechenden, und *N* als den *C* entſprechenden Punkt betrachten können, woraus zwey Arten, dieſe Correlation darzuſtellen, entſtehen. Der Rechner kann die wählen, durch welche er, in jedem beſondern Falle, am geradeſten ſein Ziel erreicht.

Iſt die Correlation der Conſtruktion ſo aufgeſtellt, ſo folgt die der abſoluten Werthe ohne Schwierigkeit

daraus, weil die correlativen Theile der beyden Figuren augenſcheinlich durch die ſich entſprechenden Punkte beſtimmt ſind.

Es bleibt alſo die Darſtellung der Correlation der Stellung übrig, oder, was auf eins hinaus kommt, die der Zeichen; aber in den beyden verglichenen Figuren iſt es deutlich, daſs die ſich entſprechenden Punkte in derſelben Ordnung auf ihren jedesmaligen Linien ſtehen. Die Correlation iſt alſo direkt, und folglich die Formeln, welche Eigenſchaften des erſten Syſtems ausdrücken, werden, ohne Veränderung der Zeichen, auf das zweyte anwendbar ſeyn, und man braucht nie, um dieſe Anwendung ins Werk zu ſtellen, in dieſe Formeln die abſoluten Werthe des zweyten für die ihm entſprechenden Werthe des erſten zu ſetzen, vorausgeſetzt, daſs man in der Rechnung nur Gröſsen brauche, die wirklich einen Theil jedes Syſtems ausmachen.

Wenn aber im correlativen Syſteme der Perpendikel, nicht wie im Urſyſteme, zwiſchen die Punkte, welche $B$ und $C$ entſprechen, fällt, wenn zum Beyſpiel das correlative Syſtem $M'N'P'Q'$ würde (*Fig.* 17.), ſo wären die entſprechenden Punkte nicht mehr nach derſelben Ordnung auf ihren correlativen Linien geſtellt, und die Correlation würde indirekt ſeyn. Um ſie zu finden, ſtelle ich zuerſt die neue Correlation der Conſtruktion dar;

1ſtes Syſtem . . . . . $ABCD$

2tes Syſtem . . . . . $M'N'P'Q'$.

Nachher um meine Arbeit zu erleichtern, entwerfe ich eine neue Figur gleich $M'N'P'Q'$ (*Fig.* 18.),

der ich dieſelben Buchſtaben wie der Urfigur beyſetze, bloſs accentuirt, um ihren Unterſchied unter einerley Benennungen beyzubehalten. Die Correlation der Conſtruktion wird alſo

1ſtes Syſtem . . . . . $ABCD$
2tes Syſtem . . . . . $A'B'C'D'$.

Zwiſchen dieſen beyden Syſtemen ſoll man jetzt die Correlation der Stellung oder Zeichen aufſtellen. Aber das iſt ſchon (86) geſchehen.

Wir brauchen alſo nur, um die Arbeit zu vollenden, in der gefundenen Tafel (86) für die Buchſtaben $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, die, deren Stelle ſie einnehmen, zu ſetzen, d. h. $M'$, $N'$, $P'$, $Q'$. Alſo endlich iſt die geſuchte Correlation unter den Dreyecken $ABCD$ und $M'N'P'Q'$ folgende:

1ſtes Syſtem $+ \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CD}$
2tes Syſtem $+ \overline{M'N'} + \overline{M'P'} + \overline{N'P'} + \overline{N'Q'} - \overline{P'Q'}$

$+ \overline{AD} + B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}D + B\hat{A}D$
$+ \overline{M'Q'} + N'\hat{M}'P' + M'\hat{N}'P' + M'\hat{P}'Q' + N'\hat{M}'Q'$

$+ C\hat{A}D + \overline{\overline{ABC}} + \overline{\overline{ABD}} + \overline{\overline{ACD}}.$
$- P'\hat{M}'Q' + \overline{\overline{M'N'P'}} + \overline{\overline{M'N'Q'}} - \overline{\overline{M'P'Q'}}.$

Aus dieſer Tafel ſieht man, was man in die Formeln, welche die Eigenſchaften des Urſyſtems $ABCD$ angeben, ſetzen muſs, um ſie auf das indirekt correlative Syſtem $M'N'P'Q'$ anwendbar zu machen.

93. Man ſieht aus dieſer Tafel, daſs von allen Quantitäten, die das Syſtem $M'N'P'Q'$ ausmachen, nur drey invers werden, oder deren Werthe die Zeichen verändern, nämlich $\overline{P'Q'}$, $P'\hat{M}'Q'$, $\overline{\overline{M'P'Q'}}$;

alſo wenn man eine neue Figur beſchreibt (*Fig.* 19.), durchaus $M'N'P'Q'$ gleich, und ihr dieſelben Buchſtaben $A$, $B$, $C$, $D$, wie in der Urfigur ſetzt, jeden an die Stelle des ihm entſprechenden, ſo braucht man nur, um die Formeln dieſer Urfigur $ABCD$ (*Fig.* 15.), auf die indirekt correlative Figur $ABCD$ (*Fig.* 19.) anzuwenden, in dieſen Formeln die Zeichen dreyer Quantitäten zu verändern, nämlich von $\overline{CD}$, $C\hat{A}D$ und $\overline{\overline{ACD}}$ (25).

Hat man einmal durch die bloſse Veränderung der Zeichen dieſer drey Quantitäten die auf das zweyte Syſtem $ABCD$ (*Fig.* 19.) anwendbaren Formeln, ſo wird es leicht ſeyn, die für das Syſtem $M'$, $N'$, $P'$, $Q'$ zu finden. Denn weil dieſes und das zweyte Syſtem $ABCD$ (*Fig.* 19.) ſich dann in direkter Correlation unter einander befinden, ſo braucht man, um die Formeln des einen auf das andere anzuwenden, gar keine Veränderung der Zeichen vorzunehmen, ſondern bloſs die abſoluten Werthe des zweyten für die des erſten zu ſetzen, d. h. die Punkte des einen für die entſprechenden Punkte des andern, ohne irgend eine Veränderung der Zeichen.

## Dritte Aufgabe.

94. **Die Correlationen der Conſtruktion und der Stellung zwiſchen den zwey Dreyecken $ABCDFG$ und $MNPQRS$ (*Fig.* 20. 21. 22.) aufzuſtellen, wo in jedem, Perpendikel aus zwey beliebigen Winkeln,**

auf die jedesmaligen gegenüberſtehenden Seiten geſenkt ſind.

Wir wollen als Maaſsſtab zur Vergleichung (*Fig.* 20.) $ABCDFG$ annehmen, wo ich vorausſetze, daſs das Dreyeck $ABC$ ſeine drey ſpitzen Winkel habe, und dann wollen wir nach der Reihe die Punkte, die es beſtimmen, nach der Ordnung der Conſtruktion hinſchreiben; d. h. erſt die drey Scheitelpunkte des Dreyecks $ABC$ in einer beliebigen Ordnung, z. B. $A$, $B$, $C$; dann den Punkt $D$, wo ſich die beyden Perpendikel durchſchneiden, und endlich die Punkte $F$, $G$ der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, auf welche die Perpendikel aus den gegenüberſtehenden Winkeln fallen.

Darunter wollen wir die entſprechenden Buchſtaben der correlativen Figur ſetzen, indem wir von $M$ anfangen, welcher offenbar dem Punkte $A$ entſprechen muſs, und dann willkührlich den Punkt $N$, oder den Punkt $P$ ſtellen, damit er $B$ entſpreche, hier z. B. den erſten; darauf nehmen wir den Punkt $P$ als entſprechenden für $C$; dann den Punkt $Q$, wo ſich die Perpendikel durchſchneiden, als entſprechenden Punkt für $D$, und endlich die Punkte $R$, $S$, um den Punkten $F$, $G$ zu entſprechen. Denn weil man in der Urfigur $F \mp \overline{AB} \cdot \overline{CD}$ hat, ſo muſs der correlative Punkt von $F$ im neuen Syſteme der ſeyn, wo die beyden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ correlativen Linien zuſammenſtoſsen; aber nach der Hypotheſe entſpricht $A$ dem Punkte $M$, $B$ dem Punkte $N$; alſo $\overline{AB}$ der Linie $\overline{MN}$. Eben ſo ſieht man, daſs, da $P$ dem Punkte $C$, und $Q$ dem Punkte $D$ entſpricht, $\overline{PQ}$ auch der Linie

$\overline{CD}$ entſpreche; alſo $\overline{MN}$ $\overline{PQ}$ oder $R$ entſpricht $\overline{AB}$ $\overline{CD}$ oder $F$; alſo muſs $R$ unter $F$, und aus demſelben Grunde $S$ unter $G$ geſchrieben werden.

Alſo iſt ſchon die Correlation der Conſtruktion beyder Figuren folgende;

1ſtes Syſtem . . . . $ABCDFG$

2tes Syſtem . . . . $MNPQRS$.

Iſt die Correlation der Conſtruktion ſo dargeſtellt, ſo folgt die der abſoluten Werthe leicht, weil die correlativen Theile augenſcheinlich durch die ſich entſprechenden Punkte beſtimmt ſind. Es bleibt alſo noch übrig die Correlation der Stellung, oder was eins iſt, die der Zeichen darzuſtellen.

Im Urſyſtem ſetzt man voraus, daſs die drey Winkel ſpitzig ſind, alſo will ich nicht den Fall unterſuchen, wann dieſelbe Sache bey'm umgeformten correlativen Syſtem $MNP$ (*Fig.* 21.) ſtatt hat, weil dann die Correlation augenſcheinlich direkt iſt, und die Verrichtung gar keine Schwierigkeiten hat. Aber der Winkel $N\hat{M}P$ kann ſtumpf ſeyn, oder einer von den andern Winkeln $M\hat{N}P$, $M\hat{P}N$, aus welchen die Perpendikel geſenkt ſind. Dieſe beyden Fälle will ich nach der Reihe unterſuchen.

Ich ſtelle mir alſo zuerſt vor, daſs $N\hat{M}P$ ſtumpf ſey (*Fig.* 22.). Um meine Arbeit zu erleichtern, entwerfe ich (*Fig.* 23.) eine neue Figur, der correlativen Figur gleich, zu der ich die accentuirten Buchſtaben der Urfigur ſetze. Man kann auch dieſe accentuirten Buchſtaben in die correlative Figur ſelbſt den ihnen entſprechenden Buchſtaben zur Seite ſchreiben, d. h. $A'$ zur Seite von $M$ u. ſ. w. Jetzt ſoll man alſo die

Correlation der Zeichen zwiſchen folgenden beyden Syſtemen aufſtellen:

1ſtes Syſtem . . . . $ABCDFG$

2tes Syſtem . . . . $A'B'C'D'F'G'$.

Hierzu zähle ich erſt die Quantitäten auf, die ich in die Tafel der Correlation bringen will. Wir wollen uns mit folgenden begnügen:

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{FD}$, $\overline{GD}$, $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $B\hat{D}C$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$, $C\hat{B}D$.

Iſt dieſs geſchehen, ſo ſtelle ich mir eine ſtufenweiſe Bewegung vor, durch die das Urſyſtem ſich in das correlative verwandelt. Ich nehme z. B. an, daſs dieſe Umformung durch eine Bewegung des Punktes $A$ gegen $D$ auf der Linie $\overline{AD}$ geſchieht, welche ſie vereinigt, ſo daſs, nachdem die beyden Punkte in einander gefallen ſind, die Bewegung fortgehe, und daſs ſie die Stellungen unter einander auswechſeln. Iſt dieſs geſchehen, ſo braucht man ſich nur eine ſtufenweiſe Veränderung der abſoluten Werthe vorzuſtellen, wodurch nichts mehr an der Correlation der Zeichen verändert wird, damit ſich die beyden Figuren einander decken können.

Ich nehme alſo an, daſs dieſe Veränderung bewirkt ſey, und unterſuche zuerſt, welche von den vorher aufgezählten Quantitäten bey dieſer Bewegung, welche das Urſyſtem mit dem correlativen identiſch macht, weder durch o noch durch $\infty$ gegangen ſind, (denn dieſe würden direkt geblieben ſeyn, und man weiſs ſchon, daſs das Zeichen der Correlation einer jeden $+$ iſt.

Nun iſt es ſichtbar, daſs nach der vorausgeſetzten Bewegung der Umformung $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $BF$, $\overline{CG}$, $\overline{BG}$, $CF$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $B\hat{D}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{B}D$ weder durch o noch durch $\infty$ gegangen ſind. So bleiben alſo die ſechs Quantitäten $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $FD$, $\overline{GD}$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$ nach, die wohl invers geworden ſeyn könnten.

Um der Einbildungskraft bey der angezeigten Verrichtung zu Hülfe zu kommen, braucht man nur die Figur in einer Stellung zu betrachten, die der unendlich nahe iſt, wo der Uebergang des erſten Syſtems zum zweyten geſchieht; dann wird man leicht ſehen, welche von dieſen Quantitäten der Durchgang verſchwinden läſst oder ſie unendlich macht, und welche endlich bleiben müſſen. So im gegenwärtigen Beyſpiel betrachte ich die Figur in dem Augenblicke, wo $A$ nahe dabey iſt in $D$ zu fallen (*Fig.* 20.). Die Stellung von $A$ ſey dann $a$, und eben ſo $f$, $g$ die Stellungen von $F$, $G$; ſo iſt es offenbar, daſs die Quantitäten, die ſich dann unendlich klein finden, und die folglich beym Durchgang verſchwinden müſſen (d. h. in dem Augenblicke, wo $a$, welches $A$ vorſtellt, in $D$ fällt) $\overline{af}$, $\overline{ag}$, $\overline{fD}$, $\overline{gD}$, $a\hat{B}D$ und $a\hat{C}D$ ſeyn werden. Setzen wir alſo wieder für $a$, $f$, $g$ die Buchſtaben $A$, $F$, $G$, welche ſie vorſtellen, ſo wird man ſehen, daſs dem gemäſs, was ich geſagt habe, die Quantitäten, welche durch die Veränderung invers werden können, $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{FD}$, $\overline{GD}$, $A\hat{B}D$ und $A\hat{C}D$ ſind. Ich will jede von ihnen beſonders unterſuchen, um zu ſehen, was ſie geworden iſt.

1) Im Urſyſtem hat man $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF}$, im umgeformten im Gegentheil $\overline{A'F'} = \overline{B'F'} - \overline{A'B'}$; alſo iſt $\overline{A'F'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

2) Im Urſyſtem hat man $\overline{AG} = \overline{AC} - \overline{CG}$, im umgeformten $\overline{A'G'} = \overline{C'G'} - \overline{A'C'}$; alſo iſt $\overline{A'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

3) Im Urſyſtem hat man $\overline{FD} = \overline{CF} - \overline{CD}$, im umgeformten $\overline{F'D'} = \overline{C'D'} - \overline{C'F'}$; alſo iſt $\overline{F'D'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

4) Im Urſyſtem hat man $\overline{GD} = \overline{BG} - \overline{BD}$, im umgeformten $\overline{G'D'} = \overline{B'D'} - \overline{B'G'}$; alſo iſt $\overline{G'D'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

5) Im Urſyſtem hat man $A\hat{B}D = A\hat{B}C - D\hat{B}C$, im umgeformten $A'\hat{B}'D' = D'\hat{B}'C' - A'\hat{B}'C'$; alſo iſt $A'\hat{B}'D'$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

6) Im Urſyſtem hat man $A\hat{C}D = A\hat{C}B - D\hat{C}B$, im umgeformten $A'\hat{C}'D' = D'\hat{C}'B' - A'\hat{C}'B'$; alſo iſt $A'\hat{C}'D'$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

Hier iſt alſo die Correlation der Zeichen ganz zwiſchen den beyden Syſtemen $ABCDFG$ und $A'B'C'D'F'G'$ aufgeſtellt. Setzt man für das letztere Buchſtabe für Buchſtabe das Syſtem $MNPQRS$, ſo erhalten wir folgende allgemeine Tafel der Correlation zwiſchen den Figuren $ABCDFG$ und $MNPQRS$:

1ſtes Syſtem $+ \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AF} + \overline{AG}$
2tes Syſtem $+ \overline{MN} + \overline{MP} + \overline{NP} - \overline{MR} - \overline{MS}$

$+ \overline{BF} + \overline{CG} + \overline{BG} + \overline{CF} + \overline{BD} + \overline{CD} + \overline{FD}$
$+ \overline{NR} + \overline{PS} + \overline{NS} + \overline{PR} + \overline{NQ} + \overline{PQ} - \overline{RQ}$

$+ \overline{GD} + B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B + B\hat{D}C + A\hat{B}D$
$- \overline{SQ} + N\hat{M}P + M\hat{N}P + M\hat{P}N + N\hat{Q}P - M\hat{N}Q$

$+ A\hat{C}D + B\hat{C}D + C\hat{B}D.$
$- M\hat{P}Q + N\hat{P}Q + P\hat{N}Q.$

Dieſe Tafel drückt alſo die Subſtitutionen aus, die man in den Formeln des Urſyſtems *ABCDFG* machen muſs, damit ſie anwendbar auf das correlative Syſtem *MNPQRS* werden, wenn der Winkel $N\hat{M}P$ des Dreyecks *MNP* ſtumpf iſt, da alle Winkel im entſprechenden Dreyecke *ABC* ſpitzig ſind.

Giebt man dem correlativen Syſtem dieſelben Buchſtaben wie dem Urſyſtem (*Fig.* 23. *), ſo wird man ſehen, daſs, um die Formeln von dieſem auf das andere anzuwenden, man nur in dieſen Formeln die Zeichen von ſechs Quantitäten zu verändern braucht, nämlich $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{FD}$, $\overline{GD}$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$; indem wir immer annehmen, daſs in dieſen Formeln keine anderen Quantitäten kommen, als die, deren Aufzählung bey der allgemeinen Tafel der Correlation vorkam.

95. Wir müſſen jetzt den zweyten Fall unterſuchen, d. h. den, wenn einer von den andern Winkeln $M\hat{N}P$, $M\hat{P}N$ ſtumpf iſt. Das neue Syſtem iſt (*Fig.* 24.) vorgeſtellt, wo man z. B. annimmt, daſs $M\hat{N}P > \pi$.

Ich verfahre wie oben, bis nach der Aufzählung der Quantitäten, die in die Tafel der Correlation kommen ſollen.

Iſt dieſs geſchehen, ſo ſtelle ich mir eine ſtufenweiſe Veränderung vor, wodurch das Urſyſtem in das correlative Syſtem fällt. Ich bilde mir z. B. ein, daſs die gerade Linie $\overline{AB}$ ſich um den Punkt $B$ ſo drehe, daſs der Winkel $A\hat{B}C$ immer zunimmt, bis er gröſser wird wie ein Rechter. Man ſieht leicht ein, daſs während dieſer Bewegung die Linie $CF$, die nach der Conſtruktion immer perpendikulair auf $\overline{AB}$ bleibt, ſich in einem fort der Linie $\overline{CE}$ nähert, indem ſie ſich um den Punkt $C$ dreht; daſs ferner in dem Augenblicke, wo $A\hat{B}C = \pi$, $\overline{CF}$ in $\overline{CB}$ fällt, und daſs endlich, wenn $A\hat{B}C$ ſtumpf geworden iſt, $\overline{CF}$ unter $\overline{CB}$ geht; ſo daſs das Syſtem die (*Fig.* 24 u. 25.) vorgeſtellte Form annehmen wird. So iſt nichts übrig, damit das neue Syſtem und das Urſyſtem einander decken, als eine paſſende ſtufenweiſe Veränderung der abſoluten Werthe anzunehmen, wodurch nichts mehr an der Correlation der Zeichen verändert wird.

Ich ſtelle mir alſo dieſe Veränderung ſchon als geſchehen vor, und ſehe dann erſt, welche von den aufgezählten Quantitäten bey dieſer Bewegung, welche das Urſyſtem mit dem correlativen identiſch gemacht hat, weder durch o noch durch ∞ gegangen ſind; denn dieſe werden direkt geblieben ſeyn, und man weiſs ſchon, daſs ihr Zeichen der Correlation + iſt.

Nun kann man leicht durch den vorher angezeigten Gang ſehen (94), daſs die Quantitäten, welche kraft dieſer Bewegung der Umformung weder durch o noch durch ∞ gingen, folgende ſind, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{CG}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$, $\overline{CD}$, $\overline{GD}$, $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $B\hat{D}C$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $C\hat{B}D$. Es bleiben nur die Quantitäten $\overline{BF}$, $\overline{BD}$, $\overline{FD}$, $B\hat{C}D$ nach, die, da ſie durch o gegangen ſind, invers geworden ſeyn könnten. Ich unterſuche alſo nach der Reihe, was jede von ihnen insbeſondere geworden iſt.

1) Im Urſyſtem hat man $\overline{BF} = \overline{AB} - \overline{AF}$, im umgeformten $\overline{B'F'} = \overline{A'F'} - \overline{A'B'}$; alſo iſt $\overline{B'F'}$ invers und ihr Zeichen der Correlation iſt —.
2) Im Urſyſtem hat man $\overline{BD} = \overline{BG} - \overline{GD}$, im umgeformten $\overline{B'D'} = \overline{G'D'} - \overline{B'G'}$; alſo iſt $\overline{B'D'}$ invers und ihr Zeichen der Correlation iſt —.
3) Im Urſyſtem hat man $\overline{FD} = \overline{CF} - \overline{CD}$, im umgeformten $\overline{F'D'} = \overline{C'D'} - \overline{C'F'}$; alſo iſt $\overline{F'D'}$ invers und ihr Zeichen der Correlation iſt —.
4) Im Urſyſtem hat man $B\hat{C}D = A\hat{C}B - A\hat{C}D$, und im correlativen Syſtem $B'\hat{C}'D' = A'\hat{C}'D' - A\hat{C}B$; alſo iſt $B'\hat{C}'D'$ invers und ſein Zeichen der Correlation iſt —.

Hier iſt alſo die Correlation der Zeichen ganz zwiſchen den Syſtemen $ABCDFG$ und $A'B'C'D'F'G'$ dargeſtellt. Setzt man nun dafür Buchſtabe für Buchſtabe, das Syſtem $M'N'P'Q'R'S'$, ſo haben wir folgende allgemeine Tafel der Correlation zwiſchen den beyden Syſtemen $ABCDFG$ und $M'N'P'Q'R'S'$ (*Fig.* 20 u. 24.).

1ſtes Syſtem $+\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AF}+\overline{AG}$
2tes Syſtem $+\overline{M'N'}+\overline{M'P'}+\overline{N'P'}+\overline{M'R'}+\overline{M'S'}$

$+\overline{BF}+\overline{CG}+\overline{BG}+\overline{CF}+\overline{BD}+\overline{CD}$
$-\overline{N'R'}+\overline{P'S'}+\overline{N'S'}+\overline{P'R'}-\overline{N'Q'}+\overline{P'Q'}$

$+\overline{FD}+\overline{GD}+B\hat{A}C+A\hat{B}C+A\hat{C}B$
$-\overline{R'Q'}+\overline{S'Q'}+N'\hat{M}'P'+M'\hat{N}'P'+M'\hat{P}'N'$

$+B\hat{D}C+A\hat{B}D+A\hat{C}D+B\hat{C}D+C\hat{B}D.$
$+N'\hat{Q}'P'+M'\hat{N}'Q'+M'\hat{P}'Q'+N'\hat{P}'Q'+P'\hat{N}'Q'.$

Dieſe Tafel drückt alſo die Subſtitutionen aus, die man in den Formeln, welche die Eigenſchaften des Urſyſtems ausdrücken, vornehmen muſs, um ſie auf das indirekt correlative Syſtem $M'N'P'Q'R'S'$ anwendbar zu machen, von denen das erſte lauter ſpitze Winkel, und das letzte den Winkel $M'N'P'$ ſtumpf hat.

Giebt man dieſem correlativen Syſteme dieſelben Buchſtaben wie dem Urſyſteme, ſo ſieht man, daſs, um die Formeln des (*Fig.* 20.) vorgeſtellten auf das (*Fig.* 26.) vorgeſtellte anwendbar zu machen, man nur in dieſen Formeln die Zeichen der vier Quantitäten $\overline{BF}$, $\overline{BD}$, $\overline{FD}$, $B\hat{C}D$ zu verändern braucht. Aus denſelben Gründen, um die Formeln deſſelben Urſyſtems auf das indirekt correlative Syſtem *ABCDFG* (*Fig.* 27.) anwendbar zu machen, wo der Winkel *ACB* ſtumpf iſt, braucht man nur in den Formeln die Zeichen der vier Quantitäten $\overline{CG}$, $\overline{CD}$, $\overline{GD}$, $C\hat{B}D$ zu verändern.

96. Man kann alſo zwiſchen den vier dargeſtellten Syſtemen (*Fig.* 20. 23. 26. 27.) folgende Cor-

relation aufſtellen, in welcher man der Kürze halber alle Ausdrücke, welche in den vier Syſtemen daſſelbe Zeichen behalten, weggelaſſen hat. *Fig.* 20. iſt als Urſyſtem angenommen, wo man alle Winkel ſpitzig vorausſetzt, *Fig.* 23.* als zweytes, wo $B\hat{A}C > \pi$, *Fig.* 26. als drittes, wo $A\hat{B}C > \pi$, *Fig.* 27. als viertes, wo $A\hat{C}B > \pi$.

**Allgemeine Correlation der vier dargeſtellten Syſteme (*Fig.* 20. 23. 26. 27.):**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ſtes Syſtem | + $\overline{AF}$ | + $\overline{AG}$ | + $\overline{BF}$ | + $\overline{CG}$ | + $\overline{BD}$ | + $\overline{CD}$ | |
| 2tes Syſtem | − $\overline{AF}$ | − $\overline{AG}$ | + $\overline{BF}$ | + $\overline{CG}$ | + $\overline{BD}$ | + $\overline{CD}$ | |
| 3tes Syſtem | + $\overline{AF}$ | + $\overline{AG}$ | − $\overline{BF}$ | + $\overline{CG}$ | − $\overline{BD}$ | + $\overline{CD}$ | |
| 4tes Syſtem | + $\overline{AF}$ | + $\overline{AG}$ | + $\overline{BF}$ | − $\overline{CG}$ | + $\overline{BD}$ | − $\overline{CD}$ | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | + $\overline{FD}$ | + $\overline{GD}$ | + $A\hat{B}D$ | + $A\hat{C}D$ | + $B\hat{C}D$ | + $C\hat{B}D$. | |
| | − $\overline{FD}$ | − $\overline{GD}$ | − $A\hat{B}D$ | − $A\hat{C}D$ | + $B\hat{C}D$ | + $C\hat{B}D$. | |
| | − $\overline{FD}$ | + $\overline{GD}$ | + $A\hat{B}D$ | + $A\hat{C}D$ | − $B\hat{C}D$ | + $C\hat{B}D$. | |
| | + $\overline{FD}$ | − $\overline{GD}$ | + $A\hat{B}D$ | + $A\hat{C}D$ | + $B\hat{C}D$ | − $C\hat{B}D$. | |

Vermittelſt dieſer allgemeinen Tafel der Correlation zwiſchen den vier Syſtemen ſieht man ſogleich, wenn die Formeln für irgend eins von ihnen gegeben ſind, welche Veränderungen man in den Zeichen machen muſs, um ſie auf ein anderes anwenden zu können, weil man nur die Zeichen zu verändern braucht, welche man aus der vorhergehenden Tafel für beyde Syſteme nicht dieſelben findet.

Welches andere Dreyeck man auch vornehmen wolle, ſo wird es immer leicht ſeyn, ſeine direkte Correlation mit einem von den vorigen vier Syſtemen darzu-

darzuſtellen, und folglich nachher die auf daſſelbe unmittelbar anwendbaren Formeln zu finden.

## Vierte Aufgabe.

97. Die Correlationen der Conſtruktion und der Stellung darzuſtellen, welche zwiſchen zwey Dreyecken *ABCDFGH* und *MNPQRST* ſtatt haben (*Fig.* 28 u. 29.), wo in jedem die Perpendikel aus jedem Winkel auf die gegenüberſtehende Seite geſenkt ſind.

Ich nehme als Maaſsſtab zur Vergleichung das Dreyeck *ABCDFGH*, wo ich vorausſetze, daſs das Dreyeck *ABC* drey ſpitzige Winkel habe. Ich ſchreibe die Punkte, welche dieſe Figur beſtimmen, nach der Reihe in einer beliebigen Ordnung, aber ſo viel wie möglich nach der Ordnung der Conſtruktion, welche die natürlichſte und leichteſte iſt, d. h. erſt die drey Scheitelpunkte *A*, *B*, *C*, dann den Punkt *D*, wo ſich die drey Perpendikel ſchneiden *), und endlich die drey Punkte *F*, *G*, *H* auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, auf welche die aus den gegenüberſtehenden Winkeln geſenkten Perpendikel fallen.

Unter dieſen erſten Buchſtaben, mit denen man die Urfigur bezeichnet, ſchreibe ich die entſprechenden Buchſtaben der correlativen Figur, indem ich beliebig von *M*, *N* oder *P*, hier z. B. von *M*, anfange, welches *A* entſprechen ſoll; dann willkührlich

*) Man wird (129) beweiſen, daſs die drey Perpendikel ſich in einem Punkte ſchneiden.

A. d. Verf.

mit $N$ oder $P$ fortfahre, hier mit $N$, welches $B$ entſprechen ſoll. Nachher ſetze ich $P$, dann $Q$, dann $R$, dann $S$, dann $T$. Daſs die Buchſtaben $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ ſo geſetzt werden müſſen, beweiſe ich ſo:

$MNP$ iſt nach der Hypotheſe die vorgegebene mit $ABC$ correlative Figur; hat man alſo $M$ als $A$, $N$ als $B$ entſprechend genommen, ſo muſs $P$ auch $C$ entſprechen.

$D$ iſt in der erſten Figur der Punkt, wo ſich die drey Perpendikel ſchneiden, und $Q$ der, wo ſie ſich in der correlativen Figur ſchneiden, alſo entſpricht $Q$ dem Punkte $D$.

Dieſs angenommen, ſo haben wir $F \doteq \overline{AB} \cdot \overline{CD}$, alſo der $F$ entſprechende Punkt iſt derjenige, wo ſich die Linien, welche $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ entſprechen, ſchneiden, d. h. (weil $M$, $N$, $P$, $Q$ den Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ entſprechen, wie man geſehen hat) $\overline{MN} \cdot \overline{PQ}$. Dieſer Punkt iſt nun $R$, alſo entſpricht $R$ dem Punkte $F$. Eben ſo, weil $G \doteq \overline{AC} \cdot \overline{BD}$, wird der ihm entſprechende Punkt $\overline{MP} \cdot \overline{NQ} \doteq S$, und auf gleiche Art, weil $H \doteq \overline{AD} \cdot \overline{BC}$, wird der $H$ entſprechende Punkt $\overline{MQ} \cdot \overline{NP} \doteq T$ ſeyn. Alſo iſt die Correlation der Conſtruktion folgende:

1ſtes Syſtem . . . . $ABCDFGH$
2tes Syſtem . . . . $MNPQRST$.

Iſt ſo die Correlation der Conſtruktion dargeſtellt, ſo folgt die der abſoluten Werthe ohne Schwierigkeit, weil die correlativen Theile der beyden Figuren augenſcheinlich durch die entſprechenden Punkte beſtimmt ſind. Es bleibt uns alſo übrig die Correlation der Stellung oder die der Zeichen aufzuſtellen.

Nun nimmt man im Urſyſtem an, daſs jeder der drey Winkel kleiner als ein Rechter ſey. Ich will alſo nicht den Fall unterſuchen, wo daſſelbe im correlativen Dreyeck *MNP* eintritt, weil dann die Correlation augenſcheinlich direkt iſt, und die Verrichtung gar keine Schwierigkeiten hat. Aber ein Winkel kann auch ſtumpf ſeyn. Alſo unterſuche ich nur den Fall, wenn einer von den drey Winkeln $N\hat{M}P$, $M\hat{N}P$, $M\hat{P}N$ ſtumpf iſt.

Ich nehme z. B. an, daſs der Winkel $N\hat{M}P$ ſtumpf ſey; um meine Arbeit zu erleichtern, entwerfe ich eine neue Figur (*Fig.* 30.), gleich der vorgegebenen correlativen Figur, und ſetze die Buchſtaben der Urfigur in ſie hinein, nur zum Unterſchiede accentuirt, ſonſt unter einerley Benennung; oder man kann, was noch bequemer iſt, dieſelben Buchſtaben in die correlative Figur ſelbſt ſchreiben, indem man ſie bey den ihnen entſprechenden ſetzt, d. h. $A'$ bey $M$, $B'$ bey $N$ u. ſ. w. Man hat jetzt alſo die Correlation der Stellung zwiſchen den zwey folgenden Syſtemen aufzuſtellen:

1ſtes Syſtem . . . . $A\ B\ C\ D\ F\ G\ H.$
2tes Syſtem . . . . $A'B'C'D'F'G'H'.$

Hierzu rechne ich vorerſt die Quantitäten auf, die ich in die Tafel der Correlation bringen will. Wir wollen uns mit folgenden begnügen:

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{BG}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $B\hat{A}C$, $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$, $C\hat{B}D$, $A\hat{C}B$, $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$, $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$, $B\hat{D}C$.

Iſt dieſs geſchehen, ſo ſtelle ich mir im Urſyſtem eine ſtufenweiſe Bewegung vor, vermöge deren dieſs Syſtem ſich in das correlative verwandelt; z. B. ich ſtelle mir vor, daſs $A$ und $D$ ihre Stellungen austauſchen, indem ſich $A$ nach $H$, und $D$ in entgegengeſetzter Richtung bewegt. Nach dieſer Verwechſelung der Stellen braucht man nur eine Veränderung durch unmerkbare Grade in den abſoluten Werthen vorauszuſetzen, um die Urfigur dahin zu bringen, daſs ſie ganz die correlative Figur decken, wodurch nichts an der Correlation der Zeichen verändert wird.

Ich ſetze alſo voraus, daſs wirklich dieſe Veränderung ſo geſchehen ſey, daſs beyde Syſteme einander decken, und unterſuche zuerſt, welches in dieſem Augenblicke die Quantitäten ſind unter den vorher aufgezählten, die weder durch o noch durch ∞ gegangen ſind; denn dieſe ſind direkt geblieben, und man weiſs, daſs ihr Zeichen der Correlation + iſt.

Nun iſt es leicht zu ſehen, daſs, nach der Bewegung der Umformung, die Quantitäten, welche nicht durch o oder durch ∞ gegangen ſind, folgende ſind:

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{CF}$, $\overline{BG}$, $\overline{CG}$, $B\hat{A}C$, $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $C\hat{B}D$, $A\hat{C}B$, $B\hat{C}D$, $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$, $B\hat{D}C$.

Es bleiben alſo nur die ſieben Quantitäten noch, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, die, da ſie durch o gegangen ſind, invers ſeyn könnten. Ich unterſuche alſo nach der Reihe, was jede von ihnen insbeſondere wird.

1) Im Urſyſtem hat man $\overline{AD} = \overline{AH} - \overline{DH}$, im umgeformten $\overline{A'D'} = \overline{D'H'} - \overline{A'H'}$; alſo iſt $\overline{A'D'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

2) Im Urſyſtem hat man $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF}$, im umgeformten $\overline{A'F'} = \overline{B'F'} - \overline{A'B'}$; alſo iſt $\overline{A'F'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

3) Im Urſyſtem hat man $\overline{DF} = \overline{CF} - \overline{DC}$, im umgeformten $\overline{D'F'} = \overline{D'C'} - \overline{C'F'}$; alſo iſt $\overline{D'F'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

4) Im Urſyſtem hat man $\overline{AG} = \overline{AC} - \overline{GC}$, im umgeformten $\overline{A'G'} = \overline{C'C'} - \overline{A'C'}$; alſo iſt $\overline{A'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

5) Im Urſyſtem hat man $\overline{DG} = \overline{BG} - \overline{BD}$, im umgeformten $\overline{D'G'} = \overline{B'D'} - \overline{B'G'}$; alſo iſt $\overline{D'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

6) Im Urſyſtem hat man $A\hat{B}D = A\hat{B}C - C\hat{B}D$, im umgeformten $A'\hat{B}'D' = C'\hat{B}'D' - A'\hat{B}'C'$; alſo iſt $A'\hat{B}'D'$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

7) Im Urſyſtem hat man $A\hat{C}D = A\hat{C}B - B\hat{C}D$, im umgeformten $A'\hat{C}'D' = B'\hat{C}'D' - A'\hat{C}'B'$; alſo iſt $A'\hat{C}'D'$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

Hier iſt alſo die Correlation der Zeichen ganz zwiſchen den Syſtemen $ABCDFGH$ und $A'B'C'D'F'G'H'$ hergeſtellt. Setzen wir alſo dafür, Buchſtabe für Buch-

ſtabe das vorgegebene Syſtem $MNPQRST$, ſo haben wir die allgemeine Tafel der Correlation zwiſchen den beyden Syſtemen $ABCDFGH$ und $MNPQRST$:

$$\begin{array}{l} \text{1ſtes Syſtem} \\ \text{2tes Syſtem} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} + \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AD} + \overline{BD} \\ + \overline{MN} + \overline{MP} + \overline{NP} - \overline{MQ} + \overline{NQ} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + \overline{CD} + \overline{AH} + \overline{BH} + \overline{CH} + \overline{DH} + \overline{AF} + \overline{BF} \\ + \overline{PQ} + MT + \overline{NT} + \overline{PT} + \overline{QT} - \overline{MR} + \overline{NR} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + \overline{CF} + \overline{DF} + \overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG} + \overline{DG} + B\hat{A}C \\ + \overline{PR} - \overline{QR} - \overline{MS} + \overline{NS} + \overline{PS} - \overline{QS} + N\hat{M}P \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + B\hat{A}D + C\hat{A}D + A\hat{B}C + A\hat{B}D + C\hat{B}D + A\hat{C}B \\ + N\hat{M}Q + P\hat{M}Q + M\hat{N}P - M\hat{N}Q + P\hat{N}Q + M\hat{P}N \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + A\hat{C}D + B\hat{C}D + A\hat{D}B + A\hat{D}C + B\hat{D}C. \\ - M\hat{P}Q + N\hat{P}Q + M\hat{Q}N + M\hat{Q}P + N\hat{Q}P. \end{array} \right.$$

Dieſe Tafel drückt alſo die Subſtitutionen aus, die man in den Formeln des Urſyſtems $ABCDFGH$ machen muſs, wo man annimmt, daſs die drey Winkel, jeder kleiner als ein Rechter ſind, um dieſe Formeln auf das correlative Syſtem $MNPQRST$ anwendbar zu machen, in dem die drey Winkel des Dreyecks $MNP$ denen des Dreyecks $ABC$ entſprechen, und $N\hat{M}P$, welcher $B\hat{A}C$ entſpricht, ſtumpf angenommen wird.

98. Giebt man dem correlativen Syſtem dieſelben Buchſtaben, als dem Urſyſtem (*Fig.* 31.), ſo wird man ſehen, daſs, um die Formeln dieſes auf das andere anzuwenden, man nur in den Formeln die Zeichen der ſieben Quantitäten $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$ zu verändern braucht.

Aus denſelben Gründen müſste man, wenn $A\hat{B}C > \pi$ (*Fig.* 32.), die Zeichen folgender ſieben Quantitäten in den Formeln des Urſyſtems verändern, um dieſe Formeln auf das umgeformte anwendbar zu machen, $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $B\hat{C}D$, $B\hat{A}D$.

Endlich würde der Winkel $A\hat{C}B$ ſtumpf (*Fig.* 33.), ſo müſste man bey den ſieben folgenden Quantitäten die Zeichen in den Formeln des Urſyſtems ändern, um dieſe Formeln auf das neue Syſtem anwendbar zu machen, $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$.

Man kann alſo zwiſchen den vier dargeſtellten Syſtemen (*Fig.* 28. 31. 32. 33.) folgende Correlation aufſtellen, in welcher man, um ſie abzukürzen, die Ausdrücke weggelaſſen hat, welche in den vier Syſtemen daſſelbe Zeichen behalten. Man ſetzt voraus, daſs das als Urſyſtem angenommene Dreyeck (*Fig.* 28.) drey ſpitze Winkel habe; das zweyte (*Fig.* 31.) $B\hat{A}C > \pi$; das dritte (*Fig.* 32.) $A\hat{B}C > \pi$; und das vierte (*Fig.* 33.) $A\hat{C}B > \pi$.

Allgemeine Correlation der vier dargeſtellten Syſteme (*Fig.* 28. 31. 32. 33.):

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ſtes Syſtem | + $\overline{AD}$ | + $\overline{BD}$ | + $\overline{CD}$ | + $\overline{BH}$ | + $\overline{CH}$ | + $\overline{DH}$ | + $\overline{AF}$ | + $\overline{BF}$ | + $\overline{DF}$ | + $\overline{AG}$ | + $\overline{CG}$ | + $\overline{DG}$ |
| 2tes Syſtem | − $\overline{AD}$ | + $\overline{BD}$ | + $\overline{CD}$ | + $\overline{BH}$ | + $\overline{CH}$ | + $\overline{DH}$ | − $\overline{AF}$ | + $\overline{BF}$ | − $\overline{DF}$ | − $\overline{AG}$ | + $\overline{CG}$ | − $\overline{DG}$ |
| 3tes Syſtem | + $\overline{AD}$ | − $\overline{BD}$ | + $\overline{CD}$ | − $\overline{BH}$ | + $\overline{CH}$ | − $\overline{DH}$ | + $\overline{AF}$ | − $\overline{BF}$ | − $\overline{DF}$ | + $\overline{AG}$ | + $\overline{CG}$ | + $\overline{DG}$ |
| 4tes Syſtem | + $\overline{AD}$ | + $\overline{BD}$ | − $\overline{CD}$ | + $\overline{BH}$ | − $\overline{CH}$ | − $\overline{DH}$ | + $\overline{AF}$ | + $\overline{BF}$ | + $\overline{DF}$ | − $\overline{AG}$ | − $\overline{CG}$ | − $\overline{DG}$ |

$$\begin{cases} + B\hat{A}D + C\hat{A}D + A\hat{B}D + C\hat{B}D + A\hat{C}D + B\hat{C}D. \\ + B\hat{A}D + C\hat{A}D - A\hat{B}D + C\hat{B}D - A\hat{C}D + B\hat{C}D. \\ + B\hat{A}D - C\hat{A}D + A\hat{B}D + C\hat{B}D + A\hat{C}D - B\hat{C}D. \\ - B\hat{A}D - C\hat{A}D + A\hat{B}D - C\hat{B}D + A\hat{C}D + B\hat{C}D. \end{cases}$$

Vermittelſt dieſer allgemeinen Tafel der Correlation zwiſchen den vier Syſtemen, ſieht man ſogleich, wenn die Formeln für eins von ihnen gegeben ſind, welche Veränderungen man in den Zeichen zu machen habe, um ſie auf ein anderes anzuwenden, weil man nur die Zeichen zu verändern braucht, die nach der Tafel in den verglichenen Syſtemen nicht dieſelben ſind.

Welches andere Dreyeck man auch vornehme, ſo wird es immer leicht ſeyn, ſeine direkte Correlation mit einem der vier vorigen Syſteme darzuſtellen und folglich die Formeln zu finden, die auf daſſelbe unmittelbar anwendbar ſind.

## Fünfte Aufgabe.

99. Vier beliebige Punkte, $A$, $B$, $C$, $D$, liegen in derſelben Ebene, und ſind zwey und zwey mit einander durch gerade Linien verbunden, die bis an ihren jedesmaligen Durchſchnitt gehen. Die Correlation der Conſtruktion und Stellung ſoll dargeſtellt werden, die zwiſchen allen Figuren ſtatt hat, welche aus der Vereinigung dieſer ſechs Linien entſpringen, nach den verſchiedenen Stellungen, welche die

Punkte *A*, *B*, *C*, *D* annehmen können (*Fig.* 34.).

Man ſieht leicht, daſs man die aufgegebenen Figuren auf drey bringen kann, denn die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* können geſtellt werden,

1) daſs die vier auf einander folgenden Linien $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CA}$ eine vierſeitige Figur mit ausgehenden Winkeln bilden (*Fig.* 34.) und zwiſchen ſich einen an einander hängenden Raum einnehmen;

2) daſs ein einwärts gehender Winkel da iſt (*Fig.* 36.);

3) daſs die vier Linien $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CA}$ zwey am Scheitel entgegengeſetzte Dreyecke *ABG*, *CDG* bilden (*Fig.* 38.). Aber man kann immer dieſen Figuren den Namen „vierſeitige" geben, weil ſie alle aus der Vereinigung vier gerader Linien entſtehen, und man von der einen zur andern durch die fortwährende Bewegung der vier Scheitelpunkte gehen kann.

Dieſs feſtgeſetzt, ſo nehme ich willkührlich eine von dieſen vierſeitigen Figuren, z. B. die (*Fig.* 34.) Maaſsſtab zur Vergleichung an, und ſtelle nach der Reihe ihre Correlation mit den beyden andern dar. Wir wollen mit der vierſeitigen Figur mit einwärts gehendem Winkel (*Fig.* 36.) anfangen. Ich accentuire (*Fig.* 35.) die Buchſtaben dieſes correlativen Syſtems, um ſie von denen des Urſyſtems unterſcheiden zu können.

Nach dem, was bey den vorigen Beyſpielen geſagt iſt, kann man leicht ſehen, daſs dieſelben Buch-

ſtaben in den zwey Figuren an die ſich entſprechenden Punkte geſtellt ſind, denn z. B. man hat im erſten Syſtem $F \mp \overline{AB} \cdot \overline{CD}$, und eben ſo im zweyten $F' \mp \overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'}$; auf gleiche Art $G \mp \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ und $G' \mp \overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'}$ u. ſ. w., wir haben alſo ſchon folgende Correlation der Conſtruktion:

1ſtes Syſtem . . . . $A\ B\ C\ D\ F\ G\ H$

2tes Syſtem . . . . $A'B'C'D'F'G'H'$.

Iſt die Correlation der Conſtruktion ſo aufgeſtellt, ſo folgt die der abſoluten Werthe ohne Schwierigkeit, weil die correlativen Theile der beyden Figuren augenſcheinlich durch die ſich entſprechenden Punkte beſtimmt ſind. Es bleibt alſo nur übrig, die Correlation der Stellung oder die der Zeichen darzuſtellen. Deswegen rechne ich gleich anfangs die Quantitäten auf, die ich in die Tafel der Correlation bringen will. Wir wollen uns auf folgende beſchränken: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{AG}$, $\overline{CG}$, $\overline{AH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{BG}$, $\overline{DG}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $B\hat{A}C$, $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$, $C\hat{B}D$, $C\hat{B}F$, $D\hat{B}F$, $A\hat{C}B$, $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$, $B\hat{C}G$, $D\hat{C}G$, $B\hat{D}A$, $C\hat{B}A$, $B\hat{D}C$, $B\hat{D}F$, $C\hat{D}G$, $A\hat{D}F$, $A\hat{D}G$, $F\hat{D}G$, $A\hat{H}B$, $A\hat{H}C$, $A\hat{F}D$, $A\hat{G}D$.

Iſt dieſs geſchehen, ſo ſtelle ich mir im Urſyſtem eine ſtufenweiſe Bewegung vor, vermöge derer ſich dieſes Syſtem in das correlative Syſtem umformt. Z. B. ich ſtelle mir vor, deſs der Punkt $D$ ſich gegen $A$ bewege, bis er durch den Punkt $H$ gegangen iſt, indem die Punkte $A$, $B$, $C$ feſt bleiben. Hier iſt es deutlich, daſs $F$ und $G$ ſich in derſelben Zeit auf den jedesmaligen Linien $\overline{FA}$, $\overline{GA}$ gegen $A$ bewegen und in dem Augenblicke in $B$ und $C$ fallen werden, wo $D$

ſich auf $\overline{BC}$ befindet, und daſs ſie endlich ſich beyderſeitig zwiſchen $A$ und $B$, und $A$ und $C$ ſtellen werden. Nachher braucht man nur eine ſtufenweiſe Veränderung in den abſoluten Werthen anzunehmen, damit die Urfigur ganz in die correlative falle, welches nichts mehr an der Correlation der Zeichen verändert.

Ich nehme alſo an, daſs in der That dieſe Veränderung ſtatt gehabt habe, ſo daſs beyde Syſteme ſich decken, und unterſuche zuerſt, welche von den vorher aufgerechneten Quantitäten weder durch o noch durch ∞ gegangen ſind; denn dieſe werden direkt geblieben ſeyn, und man weiſs ſchon, daſs das Zeichen der Correlation für jede + iſt.

Folgt man dem in den vorhergehenden Beyſpielen angezeigten Gange, ſo wird man leicht ſehen, daſs folgende Quantitäten, wie $D$ in $\overline{BC}$ fiel, weder durch o noch durch ∞ gegangen ſind.

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{BG}$, $\overline{DG}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $B\hat{A}C$, $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$, $C\hat{B}F$, $D\hat{B}F$, $A\hat{C}B$, $A\hat{C}D$, $B\hat{C}G$, $D\hat{C}G$, $B\hat{D}A$, $C\hat{B}A$, $B\hat{D}C$, $A\hat{D}F$, $A\hat{D}G$, $F\hat{D}G$, $A\hat{H}B$, $A\hat{H}C$, $A\hat{F}D$, $A\hat{G}D$. Es bleiben alſo nur noch die ſieben Quantitäten

$\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $C\hat{B}D$, $B\hat{C}D$, $B\hat{D}F$, $C\hat{D}G$,

nach, die, da ſie durch o gegangen ſind, in meinem Syſteme invers ſeyn könnten. Ich unterſuche alſo, was jede insbeſondere wird.

1) Im Urſyſtem hat man $\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB}$, im umgeformten $\overline{B'F'} = \overline{A'B'} - \overline{A'F'}$; alſo iſt

$\overline{B'F'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation ist —.

2) Im Urſyſtem hat man $\overline{CG} = \overline{AG} - \overline{AC}$, im umgeformten $\overline{C'G'} = \overline{A'C'} - \overline{A'G'}$; alſo iſt $\overline{C'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

3) Im Urſyſtem hat man $\overline{DH} = \overline{AD} - \overline{AH}$, im umgeformten $\overline{D'H'} = \overline{A'H'} - \overline{A'D'}$; alſo iſt $\overline{D'H'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

4) Im Urſyſtem hat man $C\hat{B}D = A\hat{B}D - A\hat{B}C$, im umgeformten $C'\hat{B}'D' = A'\hat{B}'C' - A'\hat{B}'D'$; alſo iſt $C'\hat{B}'D'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation iſt —.

5) Im Urſyſtem hat man $B\hat{C}D = A\hat{C}D - A\hat{C}B$, im umgeformten $B'\hat{C}'D' = A'\hat{C}'B' - A'\hat{C}'D'$; alſo iſt $B'\hat{C}'D'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation iſt —.

6) Im Urſyſtem hat man $B\hat{D}F = A\hat{D}F - A\hat{D}B$, im umgeformten $B'\hat{D}'F' = A'\hat{D}'B' - A'\hat{D}'F'$; alſo iſt $B'\hat{D}'F'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation iſt —.

7) Im Urſyſtem hat man $C\hat{D}G = A\hat{D}G - A\hat{D}C$, im umgeformten $C'\hat{D}'G' = A'\hat{D}'C' - A'\hat{D}'G'$; alſo iſt $C'\hat{D}'G'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation iſt —.

Hier iſt alſo die Correlation der Zeichen zwiſchen den beyden Syſtemen $ABCDFGH$ (*Fig.* 34.) und $A'B'C'D'F'G'H'$ (*Fig.* 35.) ganz hergeſtellt; und ſo erhält man ohne Schwierigkeit die geſuchte allgemeine Tafel der Correlation.

100. Setzt man dieſelben Buchſtaben in beyde Syſteme, oder unterdrückt nur die Accente des erſten, ſo ſieht man, daſs, um die Formeln des Urſyſtems auf das correlative anwendbar zu machen, man nur in dieſen Formeln die Zeichen der ſieben Quantitäten $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $C\hat{B}D$, $B\hat{C}D$, $B\hat{D}F$, $C\hat{D}G$ zu ändern braucht.

101. Ich will jetzt den Fall unterſuchen, wo die vier auf einander folgenden Seiten des Vierecks $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CA}$ (*Fig.* 38.) zwey Dreyecke bilden, die ſich am Scheitel entgegengeſetzt ſind.

Ich verfahre wie vorher, bis nach Aufrechnung der Quantitäten, die in die Tafel der Correlation kommen ſollen. Iſt dieſs geſchehen, ſo ſtelle ich mir im Urſyſtem eine ſtufenweiſe Bewegung vor, vermöge deren dieſes Syſtem ſich in das correlative (*Fig.* 37.) verwandelt. Z. B. ich ſtelle mir vor, daſs $C$ und $D$ ihre Plätze austauſchen durch eine ſtetige Bewegung von $C$ gegen $F$, bis jenſeits des Punktes $D$, wobey die Punkte $A$, $B$, $D$, $F$ feſt bleiben. Nachher braucht man ſich nur eine ſtufenweiſe Veränderung in den abſoluten Werthen vorzuſtellen, damit die Urfigur ganz in die correlative falle, welches nichts mehr an der Correlation der Zeichen verändert.

Ich ſetze alſo voraus, daſs dieſe Veränderung in der That ſo vorgegangen ſey, daſs die beyden Syſteme einander decken, und unterſuche, welche von den vorher aufgezählten Quantitäten durch o oder durch $\infty$ gegangen ſind: denn das ſind die einzigen, die invers ſeyn können; und man weiſs ſchon, daſs das Zeichen der Correlation einer jeden andern $+$ iſt.

Folgt man dem bey den vorigen Beyſpielen angezeigten Gange, ſo ſieht man leicht, daſs die einzigen Quantitäten, die, da ſie durch o gingen, invers werden konnten, die ſieben folgenden ſind: $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{CH}$, $\overline{DG}$, $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$. Ich unterſuche alſo, was jede von ihnen insbeſondere wird.

1) Im Urſyſtem hat man $\overline{CD} = \overline{CF} - \overline{FD}$, im umgeformten $\overline{C'D'} = \overline{F'D'} - \overline{C'F'}$; alſo iſt $\overline{C'D'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

2) Im Urſyſtem hat man $\overline{CG} = \overline{AC} - \overline{AG}$, im umgeformten $\overline{C'G'} = \overline{A'C'} - \overline{A'C'}$; alſo iſt $\overline{C'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

3) Im Urſyſtem hat man $\overline{DH} = \overline{AD} - \overline{AH}$, im umgeformten $\overline{D'H'} = \overline{A'H'} - \overline{A'D'}$; alſo iſt $\overline{D'H'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

4) Im Urſyſtem hat man $\overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH}$, im umgeformten $\overline{C'H'} = \overline{B'H'} - \overline{B'C'}$; alſo iſt $\overline{C'H'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

5) Im Urſyſtem hat man $\overline{DG} = \overline{BG} - \overline{BD}$, im umgeformten $\overline{D'G'} = \overline{B'D'} - \overline{B'G'}$; alſo iſt $\overline{D'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

6) Im Urſyſtem hat man $C\hat{A}D = B\hat{A}C - B\hat{A}D$, im umgeformten $C'\hat{A}'D' = B'\hat{A}'D' - B'\hat{A}'C'$; alſo iſt $C'\hat{A}'B'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation —.

7) Im Urſyſtem hat man $C\hat{B}D = A\hat{B}D - A\hat{B}C$, im umgeformten $C'\hat{B}'D' = A'\hat{B}'C' - A'\hat{B}'D'$; alſo iſt $A'\hat{B}'D'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation —.

Hier iſt alſo die Correlation der Zeichen zwiſchen den beyden Syſtemen *ABCDFGH* (*Fig.* 34.) und $A'B'C'D'F'G'H'$ (*Fig.* 37.) ganz dargeſtellt, und man kann ohne Schwierigkeit die geſuchte allgemeine Tafel der Correlation erhalten.

102. Setzt man dieſelben Buchſtaben in beyde Syſteme (*Fig.* 34 u. 38.) oder nimmt nur die Accente des zweyten weg, ſo wird man ſehen, daſs, um die Formeln des Urſyſtems (*Fig.* 34.) auf das umgeformte (*Fig.* 38.) anwendbar zu machen, man nur in dieſen Formeln die Zeichen der ſieben Quantitäten $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{CH}$, $\overline{DG}$, $C\hat{A}B$, $C\hat{B}D$ zu ändern braucht.

Man kann alſo folgende Correlation zwiſchen den drey dargeſtellten Syſtemen (*Fig.* 34. 36. 38.) gründen, in welcher man, der Kürze wegen, alle Ausdrücke unterdrückt hat, die in den drey Syſtemen daſſelbe Zeichen behalten.

**Allgemeine Correlation der drey dargeſtellten Syſteme (*Fig.* 34. 36. 38.).**

| | | |
|---|---|---|
| 1ſtes Syſtem | $+\overline{CD} + \overline{BF} + \overline{CG} + \overline{DH} + \overline{CH} + \overline{DG}$ | $+C\hat{A}D + C\hat{B}D + B\hat{C}D + B\hat{D}F + C\hat{D}G.$ |
| 2tes Syſtem | $+\overline{CD} - \overline{BF} - \overline{CG} - \overline{DH} + \overline{CH} + \overline{DG}$ | $+C\hat{A}D - C\hat{B}D - B\hat{C}D - B\hat{D}F - C\hat{D}G.$ |
| 3tes Syſtem | $-\overline{CD} + \overline{BF} - \overline{CG} - \overline{DH} - \overline{CH} - \overline{DG}$ | $-C\hat{A}D - C\hat{B}D + B\hat{C}D + B\hat{D}F + C\hat{D}G.$ |

Vermittelſt dieſer allgemeinen Tafel der Correlation zwiſchen den drey Syſtemen ſieht man gleich, welche Veränderungen man in den Zeichen machen muſs, um die für das eine gegebenen Formeln auf das andere anzuwenden, weil nur die Zeichen geändert zu werden brauchen, die in der vorigen Tafel für die verglichenen Syſteme nicht dieſelben ſind.

Welche andere vierſeitige Figur man auch aufgebe, ſo wird es immer leicht ſeyn, ihre direkte Correlation mit einem der vorigen Syſteme darzuſtellen, und folglich die Formeln zu finden, die auf ſie unmittelbar anwendbar ſind.

103. Ich gab die allgemeine Benennung vierſeitig den drey Figuren (34, 36, 38), die jede aus der Vereinigung derſelben vier Linien *AB*, *BD*, *DC*, *CA* beſtehen, weil dieſs in der That drey correlative Figuren ſind, die aus der ſtufenweiſen Bewegung der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* entſtehen, und die weſentlich dieſelben Eigenſchaften haben; da, wie man geſehen hat, wenn die Eigenſchaften einer von den dreyen durch Formeln ausgedrückt ſind, man nur in dieſen Formeln das Zeichen einiger Quantitäten zu ändern braucht, um ſie auf jede der andern beyden anwendbar zu machen. Ich werde vollſtändige vierſeitige Figur die Vereinigung der drey einfachen nennen, d. h. die Vereinigung der vier Linien *AB*, *DB*, *DC*, *CA* bis auf ihr jedesmaliges Zuſammentreffen verlängert.

Nimmt man alſo vier willkührliche Punkte an, *A*, *B*, *C*, *D*, in welcher Ordnung man will, z. B. *A*, *B*, *D*, *C*, und verbindet *A* mit *B*, *B* mit *D*, *D* mit

mit $C$, $C$ mit $A$; so wird $ABDC$ eine einfache vierseitige Figur seyn, und die Vereinigung der vier einfachen vierseitigen Figuren $ABDC$, $AFDG$, $BFCG$, welche durch die Verbindung der vier geraden Linien $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{DA}$ bis zu ihrem jedesmaligen Durchschnitt verlängert, entstanden, wird die vollständige vierseitige Figur seyn. Jede von den einfachen vierseitigen Figuren hat zwey Diagonalen. Verbindet man den ersten Punkt mit dem dritten und den zweyten mit dem vierten, so sind sie $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ für die erste $ABDC$; $\overline{AD}$, $\overline{FG}$ für die zweyte $AFDG$; und $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ für die dritte $BFCG$. Da aber jede dieser Diagonalen zwey Vierecken gemein ist, so entspringen im Ganzen drey verschiedene Diagonalen für das vollständige Viereck daraus.

Man kann dieselben Begriffe auf Vielecke von einer gröfsern Anzahl Seiten anwenden, z. B. wenn man fünf Punkte hat, und sie in willkührlicher Ordnung nimmt, so erhält man ein Pentagon, wenn man den 1sten mit dem 2ten, den 2ten mit dem 3ten, den 3ten mit dem 4ten, den 4ten mit dem 5ten, und den 5ten mit dem 1sten verbindet; und da die Veränderung der Ordnung, welche unter diesen 5 Punkten statt haben kann, $4 . 3 = 12$ ist, so folgt, dafs 5 gerade Linien, willkührlich in einer Ebene gezogen, 12 verschiedene Pentagone bilden, deren Vereinigung man vollständiges Pentagon nennen kann. Ueberhaupt nennt man $n$ die Anzahl der gezogenen Linien, so entstehen aus ihrer Verbindung $\frac{(n-1).(n-2)....1}{2}$ Vielecke, wovon jedes $n$ Sei-

ten hat, und deren Vereinigung das vollſtändige Vieleck von der *n*ten Ordnung, oder deren Seitenzahl *n* iſt.

104. Man ſieht an dem vorher gegebenen Beyſpiele, wie man die Correlation zweyer Figuren *a priori* aufſtellen kann, d. h. ehe man die Formeln des Urſyſtems kennt. Denn wir kennen die Eigenſchaften der Figuren nicht, deren Correlation wir aufgeſtellt haben, oder haben doch wenigſtens dieſe Eigenſchaften nicht dazu benutzt, und doch zeigt uns dieſe Correlation die Veränderung der Zeichen an, die man in den Formeln des Urſyſtems vornehmen muſs, um ſie auf das umgeformte anwendbar zu machen.

Aber die Schwierigkeit, die Correlation der Stellung *a priori* aufzuſtellen, nimmt immer zu, je verwickelter die Figuren werden; und die einfachſte Art, Formeln für jede beſondere Umformung zu erhalten, iſt oft, die Reihe der Schlüſſe von vorn wieder anzufangen, die für das Urſyſtem gemacht wurden, indem man ſie nach den charakteriſtiſchen Verſchiedenheiten der beyden Syſteme modificirt. Um dieſe Verſchiedenheiten aufzufaſſen, iſt es ſehr vortheilhaft, gleich anfangs die Correlation der Conſtruktion darzuſtellen, was gewöhnlich leicht iſt; denn man hat in den vorigen Beyſpielen geſehen, daſs die gröſste Schwierigkeit in Unterſuchung der Zeichenveränderungen, oder der Correlation der Stellung, beſteht. Die Correlation der Conſtruktion, welche die abſoluten Werthe beſtimmt, hilft ſehr bey der Anwendung der gleich anfangs für das Urſyſtem ge-

führten Betrachtungen, wenn man zu den verſchiedenen correlativen Syſtemen übergehen will; vorzüglich wenn man Sorge trägt, wie wir vorhin thaten, dieſelben Buchſtaben, verſchieden accentuirt, an die ſich durch dieſe Correlation der Conſtruktion entſprechenden Punkte zu ſetzen. Dieſs iſt kein gleichgültiger Mechanismus, die Analyſis ſelbſt im Allgemeinen, um beſtimmt zu reden, iſt nur ein feiner Mechanismus auf den Theil der Dialektik angewandt, deſſen Gegenſtand Vergleichung der Gröſsen iſt.

Ueberhaupt, wenn die Correlation eingebildet oder complex wird, iſt es beynahe immer ſehr ſchwer, *a priori* die Correlation der Stellung oder der Zeichen darzuſtellen, und man iſt genöthigt, ſich auf die Correlation der Conſtruktion zu beſchränken; indem man nachher aus der durch dieſe Conſtruktion angezeigten Analogie die Mittel zieht, die Modifikationen, welche die verglichenen Syſteme unterſcheiden, zu entdecken.

Wir wollen zum Beyſpiel den Kreis und die gleichſeitige Hyperbel nehmen, zwiſchen denen, wie man weiſs, ein ſehr genaues Verhältniſs beſteht, und die in der That zwey Syſteme in complexer Correlation ſind.

105. *BDCFM* ſey ein Kreis und *BM'N'Cmn* (*Fig.* 39.) eine gleichſeitige Hyperbel, die auf denſelben Axen oder Diametern conſtruirt ſind. Weil die Gleichung des Kreiſes $yy = aa - xx$ iſt, wenn man die Abſciſſen vom Mittelpunkt nimmt, und den Radius $a$, die Abſciſſe $x$, die Ordinate $y$ nennt, und die Gleichung für die Hyperbel $y'y' = x'x' - aa$

ist, so sieht man leicht, dass die Correlation nur zwischen den Funktionen $aa$, $xx$, $yy$ von einer Seite, und $aa$, $x'x'$, $y'y'$ von der andern einfach ist, aber dass sie zwischen den einfachen Quantitäten $a$, $x$, $y$ und $a$, $x'$, $y'$ blos eingebildet oder complex ist. Man kann sie so ausdrücken:

1stes System . . . . . $a, x, y$

2tes System . . . . . $a' x' y' \sqrt{-1}$.

$A$ sey der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Curven, $\overline{BC}$ der Diameter oder erste Axe, $M$ irgend ein Punkt des Umkreises, $\overline{MP}$ die Ordinate dieses Punktes, $\overline{AP}$ die entsprechende Abscisse.

Von den Punkten $B$, $C$ wollen wir nach dem Punkte $M$ Linien ziehen, und $\overline{CM}$ verlängern, bis sie die Hyperbel in $M'$ trifft. Von diesem Punkte $M'$ wollen wir die Ordinate $\overline{M'P'}$, und von den Punkten $B$, $C$ die Linien $\overline{BM'}$, $\overline{CM'}$ ziehen. Endlich aus dem Mittelpunkte des Kreises $A$ die Linien $\overline{AM}$, $\overline{AM'}$.

Nimmt man nun $M$, $M'$ für entsprechende Punkte in den beyden Systemen, so haben wir folgende Correlation der Construktion:

1stes System . . . . $ABCMP$;

2tes System . . . . $ABCM'P'$;

daraus zieht man die Correlation der Construktion:

1stes System $\left\{\overline{AB}, \overline{AM}, \overline{BM}, \overline{CM}, \overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP},\right.$

2tes System $\left\{\overline{AB}, \overline{AM'}, \overline{BM'}, \overline{CM'}, \overline{AP'}, \overline{BP'}, \overline{CP'},\right.$

$\left\{C\hat{B}M, B\hat{C}M \text{ u. s. w.}\right.$

$\left\{C\hat{B}M', B\hat{C}M' \text{ u. s. w.}\right.$

Da die Gleichung des Kreises $\overline{MP}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AP}^2$, und die der Hyperbel $\overline{M'P'}^2 = \overline{AP'}^2 - \overline{AB}^2$ ist, so

wollen wir nach der Correlation der Conſtruktion beyder Figuren unterſuchen, in wiefern die Eigenſchaften der einen auf die andere anwendbar ſind. Ich löſe das zweyte Glied von jeder dieſer Gleichungen in ſeine zwey Faktoren auf, was für die erſte

$\overline{MP}^2 = (\overline{AB} + \overline{AP}) \cdot (\overline{AB} - \overline{AP})$ giebt, und für die zweyte

$\overline{M'P'}^2 = (\overline{AB} + \overline{AP'}) \cdot (\overline{AP'} - \overline{AB})$, wo ich ſehe, daſs die Quantität $\overline{AP'} - \overline{AB}$ oder $\overline{BP'}$ invers, in Hinſicht auf die ihr entſprechenden $\overline{AB} - \overline{AP}$ geworden iſt, während daſs $\overline{AB} + \overline{AP'}$ oder $\overline{CP'}$, die $\overline{AB} + \overline{AP}$ oder $\overline{CP}$ entſpricht, direkt bleibt.

Weil $\overline{AB} + \overline{AP} = \overline{CP}$, und $\overline{AB} + \overline{AP'} = \overline{CP'}$, $\overline{AB} - \overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{AP'} - \overline{AB} = \overline{BP'}$, ſo erhält man

$\overline{MP}^2 = \overline{BP} \cdot \overline{CP}$, und

$\overline{MP'}^2 = \overline{BP'} \cdot \overline{CP'}$, woraus man folgende zwey ſich entſprechende Proportionen zieht:

$$\overline{CP} : \overline{MP} = \overline{MP} : \overline{BP} \text{ und}$$
$$\overline{CP'} : \overline{MP'} = \overline{MP'} : \overline{BP'},$$

und folglich die gemeinſchaftliche Eigenſchaft, daſs in jeder von den verglichenen Curven die Ordinate die mittlere Proportionallinie zwiſchen den Entfernungen ihres Durchſchnitts mit der Axe von den zwey Endpunkten derſelben Axe iſt.

Die ähnlichen Dreyecke $CMP$, $CM'P'$ geben

$$\overline{CP} : \overline{MP} = \overline{CP'} : \overline{M'P'}.$$

Vergleicht man dieſe Proportion mit einer der vorigen, ſo hat man

$$\overline{MP} : \overline{BP} = \overline{CP'} : \overline{MP'}.$$

Alſo haben die beyden entſprechenden Dreyecke $BMP$, $BM'P'$ die Seiten, welche an dem rechten Winkel liegen, proportional, alſo ſind dieſe beyden Dreyecke ähnlich, welches eine neue Analogie der beyden Curven iſt.

Aus dieſer Aehnlichkeit folgt, daſs $M'\hat{B}P' = MBP$, d. h. daſs die ſich entſprechenden Linien $\overline{MB}$, $\overline{M'B}$ denſelben Winkel mit der Axe $\overline{BC}$ machen, aber in entgegengeſetzten Richtungen.

Im Kreiſe iſt der Winkel $B\hat{M}C$, der durch die geraden Linien gebildet wird, welche man vom Punkte $M$ nach den beyden Scheiteln der Curve zieht, gleich der Summe der beyden andern $M\hat{B}C$, $M\hat{C}B$. Wir wollen unterſuchen, was für den entſprechenden Winkel $B\hat{M}'C$ der andern Curve ſtatt hat. Nun iſt $M'\hat{B}P'$, der äuſsere Winkel des Dreyecks $M'BC$, gleich der Summe der beyden andern Winkel deſſelben Dreyecks; alſo $B\hat{M}'C = M'\hat{B}P' - M'\hat{C}P'$, d. h. in der gleichſeitigen Hyperbel iſt der Winkel, welchen zwey gerade Linien machen, die aus einem beliebigen Punkte nach den Scheitelpunkten gezogen ſind, immer der Unterſchied der Winkel, welchen jede dieſer beyden Linien mit der Axe bildet, während beym Kreiſe es die Summe iſt. Dieſe Eigenſchaft der Hyperbel giebt uns

$$M'\hat{B}C - M'\hat{C}B = \pi;$$

und aus demſelben Grunde, wenn wir auf dieſer Curve einen andern Punkt $N'$ annehmen, haben wir auch

$$N'\hat{B}C - N'\hat{C}B = \pi.$$

Zieht man von dieſer letzten Gleichung die erſte ab und verſetzt, ſo erhält man

$$N'\hat{B}C - M'\hat{B}C = N'\hat{C}B - M'\hat{C}B \text{ oder}$$
$$N'\hat{B}M' = N'\hat{C}M';$$

d. h. in der gleichſeitigen Hyperbel, ſo wie im Kreiſe ſind die Winkel, die ihren Scheitel an den Enden der Axe haben und auf demſelben Bogen ſtehen, gleich.

Senkt man aus den entſprechenden Punkten $M$, $M'$ die Perpendikel $\overline{Mp}$, $\overline{M'p'}$ auf die zweyte Axe $\overline{DF}$, ſo ſind die beyden Trapeze $ABMp$ und $p'M'BA$ ähnlich, und geben

$$\overline{Mp} : \overline{BA} = \overline{BA} : \overline{M'p'} \text{ oder}$$
$$\overline{AP} : \overline{BA} = \overline{BA} : \overline{AP'},$$

d. h. die halbe gemeinſchaftliche Axe $\overline{AB}$ iſt mittlere Proportionallinie zwiſchen den entſprechenden Abſciſſen $\overline{AP}$, $\overline{AP'}$.

Die Eigenſchaft endlich des Kreiſes, alle Halbmeſſer gleich zu haben, findet auch in der Hyperbel eine Eigenſchaft, die, wenn gleich verſchieden, ihr doch offenbar entſpricht. Weil die Trapeze $ABMp$ und $p'M'BA$ ähnlich ſind, ziehe man die Diagonalen $\overline{AM}$, $\overline{Bp'}$, und man wird ſehen, daſs im erſten Trapeze die Diagonale $\overline{AM}$ und die Seite $\overline{AB'}$ gleich ſind, im zweyten auch die Diagonale $\overline{Bp'}$ und die Seite $\overline{M'p'}$ gleich ſeyn müſſen; d. h. daſs in der gleichſeitigen Hyperbel jeder Punkt der zweyten Axe gleich weit vom Schenkel und von dem Punkte der Hyperbel entfernt iſt, der ihr in ſenkrechter Richtung entſpricht. Woraus man, wie man ſieht, ſehr leicht die gleichſeitige Hyperbel durch Punkte conſtruiren kann.

Ich habe hier nur eine Annäherung angedeutet, die viel weiter getrieben werden könnte; aber meine Abſicht war, nur durch ein Beyſpiel zu zeigen, wie die bloſse Correlation der Conſtruktion zwiſchen zwey Syſtemen die Unterſuchung analoger Eigenſchaften der correlativen Syſteme erleichtern kann, ſelbſt wenn die Correlation bloſs eingebildet oder complex iſt. Ich komme auf die zurück, deren Correlation einfach, direkt oder indirekt iſt, um noch auf einige neue Beyſpiele die vorhin gegebenen Grundſätze anzuwenden.

106. Eine Anwendung, die am mehreſten dazu geeignet iſt, den Einfluſs der correlativen Quantitäten auf die Geometrie zu zeigen, findet bey den Lineoangulair-Quantitäten, d. h. bey den *ſinus*, *coſ.*, *tang.* u. ſ. w. ſtatt. Dieſe Quantitäten ſind weder Linien, noch Winkel, ſondern abſtrakte Zahlen, die als Vermittler dienen, um die Correlation dieſer verſchiedenartigen Quantitäten darzuſtellen. Denn der Sinus eines Bogens iſt nicht eigentlich der Perpendikel von einem Endpunkte dieſes Winkels auf den Halbmeſſer herabgelaſſen, der durch den andern Endpunkt geht, ſondern das Verhältniſs dieſes Perpendikels zum Halbmeſſer. Sonſt könnte am Bogen eine unendliche Menge von Sinus ſtatt haben, nach der Gröſse des Cirkels, ſtatt daſs der Sinus bloſs von der Gröſse des Winkels und gar nicht vom Halbmeſſer abhängt. Er bezeichnet nichts anders, als die Zahl der Theile des Halbmeſſers, welche dieſer Perpendikel enthält, nachdem der Bogen ſelbſt ſo oder ſo viel Theile des ganzen Umkreiſes enthält.

## Sechſte Aufgabe.

107. Die Correlation der Conſtruktion und der Stellung darzuſtellen, welche zwiſchen den Lineo-angulär-Quantitäten ſtatt finden, die den verſchiedenen Gegenden des Umkreiſes entſprechen.

Aus irgend einem Punkte $C$, den man als Centrum annimmt, beſchreibe man einen Umkreis $AFA'F'$ (*Fig.* 40.), und ziehe darin zwey Durchmeſſer $\overline{AA'}$, $\overline{FF'}$ einen auf den andern ſenkrecht.

Auf dem erſten Viertel $\overset{\frown}{AF}$ des Umkreiſes nehme man willkührlich einen Punkt $B$, und ziehe von dieſem Punkte die Perpendikel $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ auf $\overline{AA'}$, $\overline{FF'}$. Auch führe man durch den Punkt $A$ eine unbeſtimmte Tangente $\overline{HAH'}$, aus dem Mittelpunkt $C$, durch $B$, die unbeſtimmte Secante $\overline{CH}$, und durch den Punkt $F$ die unbeſtimmte Tangente $\overline{FG}$.

Dieſs feſtgeſetzt, nehme man als Maafsſtab zur Vergleichung oder erſtes Syſtem die Figur $ABCDEFGH$, ſo kann man die Correlation darſtellen, die zwiſchen dieſem Urſyſtem und den verſchiedenen correlativen Syſtemen beſteht, welche ſtatt haben können, wenn man annimmt, dafs der Punkt $B$ nach und nach beliebige andere Stellungen auf dem gezogenen Umkreiſe annehme.

Wir wollen uns anfangs vorſtellen, dafs der Punkt $B$ ſich auf dem erſten Viertel des Umkreiſes fortbewege, er mag ſich nun dem Punkte $A$ oder dem Punkte $F$ nähern, und dafs man für jede ſeiner Stellungen das Syſtem aufſtelle, was mit dem, das

man als Maafsſtab zur Vergleichung annahm, correlativ iſt; d. h. daſs man Linien ziehe, die den zur Zuſammenſetzung des vorigen Syſtems gehörenden entſprechen. Alle dieſe beſondere Syſteme werden nur das auf verſchiedene Arten, durch unmerkliche Stufen, umgeformte Urſyſtem ſeyn.

Aber es iſt augenſcheinlich, daſs, da der Punkt nicht aus dem erſten Viertel des Umkreiſes, und folglich weder durch $A$, noch durch $F$ gegangen iſt, keine von den Quantitäten des Syſtems weder durch o, noch durch $\infty$ gegangen ſeyn wird. Alſo wird das umgeformte Syſtem immer mit dem Urſyſtem in direkter Correlation geblieben ſeyn; alſo ſo lange der Punkt $B$ nicht aus dieſem erſten Viertel des Umkreiſes hinausgeht, wird keiner von den Werthen des umgeformten Syſtems invers; alſo werden die Formeln des Urſyſtems unmittelbar darauf anwendbar ſeyn.

Wir wollen jetzt ſehen, was geſchieht, wenn der Punkt $B$ über $F$ gegangen iſt, und ſich auf dem zweyten Viertel des Umkreiſes befindet.

Ich will annehmen, er ſey in $B'$ angekommen, und ich ſtelle jetzt das correlative Syſtem auf, indem ich Schritt vor Schritt der Conſtruktion des Urſyſtems folge; d. h. ich ziehe vom neuen Punkte $B'$ zwey Perpendikel $\overline{B'D'}$, $\overline{B'E'}$ auf die Diameter $\overline{AA'}$, $\overline{FF'}$, hernach vom Punkte $A$, der der Urſprung oder der erſte Punkt des Bogens iſt, die unbeſtimmte Tangente $\overline{HAH'}$, die ſich hier mit der des erſten Syſtems vermiſcht; vom Mittelpunkte $C$ durch den Punkt $B'$, welcher dem Punkte $B$ des erſten Syſtems entſpricht, die unbeſtimmte Secante $\overline{HCG'}$; endlich durch den

Punkt $F$, der das erſte Viertel des Umkreiſes begränzt, die unbeſtimmte Tangente $\overline{GFG'}$, die ſich hier mit der des erſten Syſtems vermiſcht.

Dieſs feſtgeſetzt, wenn man ſich vorſtellt, daſs der Punkt $B$ durch $F$ geht, um nach $B'$ zu gelangen, ſo iſt deutlich, daſs im Augenblick, da er in $F$ fällt, verſchiedene Linien des Syſtems wie $\overline{BE} = 0$ und andere wie $\overline{AH} = \infty$ geworden ſind. Alſo können einige unter ihnen invers geworden ſeyn, und um die geſuchte Correlation darzuſtellen, muſs man ſie von denen unterſcheiden, die direkt geblieben ſind.

Hierzu wollen wir gleich anfangs die Correlation der Conſtruktion darſtellen, d. h. das Entſprechen der Punkte, die die in beyden Syſtemen gezogenen Bogen und Linien begränzen.

Die Reihe der Punkte des erſten Syſtems, denen man übrigens eine beliebige Ordnung geben kann, iſt, wie man ſieht, $ABCDEFGH$, und die des zweyten, nach derſelben Ordnung genommen, indem man der Conſtruktion folgt, $AB'CD'E'FG'H'$. Alſo ſtellt man die Correlation der Conſtruktion ſo dar:

1ſtes Syſtem . . . $ABCDEFGH$
2tes Syſtem . . . $AB'CD'E'FG'H'$.

Jetzt wollen wir die Correlation der Quantitäten, d. h. der abſoluten Werthe ſuchen; nachher kommen wir zu der der Zeichen.

Dieſe Correlation wird leicht nach der eben gegebenen Correlation der Conſtruktion darzuſtellen ſeyn. Man fängt mit Aufzählung der Quantitäten des erſten Syſtems an, die man bey der Vergleichung

beyder Syſteme gebrauchen will. Um in dem zweyten Syſteme jeden entſprechenden Werth zu finden, ſo braucht man nur auf die Punkte, die ſie begränzen, zu ſehen; denn dieſe Quantität wird augenſcheinlich der entſprechen, die im Urſyſtem durch die entſprechenden Punkte beſtimmt iſt.

Z. B. da der Punkt $A$ derſelbe für beyde Syſteme iſt, und der Punkt $B'$ des zweyten dem Punkte $A$ des erſten entſpricht, ſo iſt es augenſcheinlich, daſs der Bogen $\overset{\frown}{AB'}$ oder $\overset{\frown}{ABB'}$ dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des erſten entſpricht. Eben ſo, da $B'$ $B$ und $E'$ $E$ entſpricht, ſo wird offenbar $\overline{B'E'}$, $\overline{BE}$ entſprechen u. ſ. w. Die Correlation der abſoluten Werthe, indem man ſie auf die vorher dargeſtellte Correlation der Conſtruktion gründet, wird alſo folgende ſeyn:

1ſtes Syſtem $\left\{\overset{\frown}{AB},\ \overset{\frown}{AF},\ \overset{\frown}{BF},\ \overset{\frown}{AC},\ \overline{FC},\ \overline{BC},\ \overline{BD},\right.$
2tes Syſtem $\left\{\overset{\frown}{ABB'},\ \overset{\frown}{AF},\ \overset{\frown}{B'F},\ \overset{\frown}{AC},\ \overline{FC},\ \overline{B'C},\ \overline{B'D},\right.$

$\left\{\overline{CE},\ \overline{AD},\ \overline{BE},\ \overline{CD},\ \overline{FE},\ \overline{AH},\ \overline{FG},\ \overline{CH},\ \overline{CG}.\right.$
$\left\{\overline{CE'},\ \overline{AD'},\ \overline{BE'},\ \overline{CD'},\ \overline{FE'},\ \overline{AH'},\ \overline{FG'},\ \overline{CH'},\ \overline{CG'}.\right.$

Jetzt wollen wir auch die Correlation der Zeichen darſtellen. Hierzu unterſuche ich zuerſt, welche von den vorher aufgezählten Quantitäten in dem Augenblicke, wo das Urſyſtem zum Zuſtande des zweyten übertritt, d. h. in dem Augenblicke, wo $B$ durch $F$ geht, weder durch o, noch durch $\infty$ gehen; denn die ſind direkt geblieben, und man weiſs ſchon, daſs ihr Zeichen der Correlation $+$ iſt.

Folgt man nun dem in den vorigen Beyſpielen angezeigten Gange, d. h. betrachtet man das Syſtem in dem Augenblicke, wo $B$ durch $F$ gehen will oder

ging, und wo man $B$ noch unendlich nahe annehmen kann, so sieht man leicht, dass die Quantitäten, die nicht durch o, oder durch $\infty$ gegangen sind, $\widehat{AB}$, $\widehat{AF}$, $\overline{AC}$, $\overline{FC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$, $\overline{AD}$, $\overline{CG}$ sind. Es bleiben also nur die Quantitäten $\widehat{BF}$, $\overline{BE}$, $\overline{CD}$, $\overline{FE}$, $\overline{AH}$, $\overline{FG}$, $\overline{CH}$ nach, die, da sie theils durch o, theils durch $\infty$ gegangen sind, wohl im neuen System invers seyn könnten. Ich untersuche also, was jede von ihnen insbesondere wird.

1) Im Ursystem hat man $\widehat{BF} = \widehat{AF} - \widehat{AB}$, im umgeformten $\widehat{B'F} = \widehat{AB'} - \widehat{AF}$; also ist $\widehat{B'F}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

2) Im Ursystem hat man $\overline{BE} = \overline{AC} - \overline{AD}$, im umgeformten $\overline{B'E'} = \overline{A'D'} - \overline{AC}$; also ist $\overline{B'E'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

3) Aus demselben Grunde ist $\overline{CD'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

4) Im Ursystem hat man $\overline{FE} = \overline{FF'} - \overline{EF'}$, im umgeformten System $FE' = \overline{FF'} - \overline{E'F'}$; also ist $\overline{FE'}$ direkt, und ihr Zeichen der Correlation +.

5) $\overline{AH'}$ ist, wie $B$ in $F$ fiel, durch $\infty$ gegangen; um zu wissen, was sie wird, nehme ich willkührlich einen festen Punkt $K$ auf der Richtung dieser Tangente und jenseits des Punktes $H$. Dieß angenommen, so hat man

im Ursystem $\overline{AH} = \overline{AK} - \overline{HK}$,

im umgeformten $\overline{AH'} = \overline{H'K} - \overline{AK}$;

also ist $\overline{AH'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

Man kann daſſelbe beweiſen, ohne zu dem Hülfspunkt $K$ ſeine Zuflucht zu nehmen; denn die beyden ähnlichen Dreyecke $ACH'$, $E'B'C$ geben

$$\overline{AH'} : \overline{AC} = \overline{E'C} : \overline{E'B'}, \text{ oder}$$

$$\overline{AH'} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{E'C}}{\overline{E'B'}}.$$

Dieſs letzte Glied iſt nun invers (27), weil nach den vorher gefundenen Zeichen der Correlation für $\overline{AC}$, $\overline{E'C}$, $\overline{E'B'}$ bloſs die letzte Quantität invers iſt.

6) Eben ſo beweiſt man, daſs die Quantität $\overline{FG'}$ invers und ihr Zeichen der Correlation — ſeyn muſs, wenn man auf $\overline{FG}$ einen Hülfspunkt jenſeits des Punktes $G$ annimmt, oder auch durch die ähnlichen Dreyecke $FG'C$, $E'B'C$.

7) Die ſchon vorher betrachteten ähnlichen Dreyecke $ACH'$, $E'B'C$ geben $\overline{CH'} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB'}}{\overline{E'B'}}$; in dieſem letzten Gliede nun iſt $\overline{E'B'}$ allein invers, alſo iſt $\overline{CH'}$ auch invers und ihr Zeichen der Correlation —.

So iſt alſo die Correlation der Zeichen ganz zwiſchen den beyden Syſtemen $ABCDEFGH$ und $AB'CD'E'FG'H'$ dargeſtellt, und wir erhalten folgende

Allgemeine Tafel der Correlation zwiſchen den beyden Syſtemen:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1ſtes Syſtem | + $\widehat{AB}$ | + $\widehat{AF}$ | + $\widehat{BF}$ | + $\overline{AC}$ | + $\overline{FC}$ |
| 2tes Syſtem | + $\widehat{ABB'}$ | + $\widehat{AF}$ | — $\widehat{B'F}$ | + $\overline{AC}$ | + $\overline{FC}$ |

$$\left\{\begin{array}{l} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CD} + \overline{FE} \\ + \overline{B'C} + \overline{B'D'} + \overline{CE'} + \overline{AD'} - \overline{B'E'} - \overline{CD'} + \overline{FE'} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} + \overline{AH} + \overline{FG} + \overline{CH} + \overline{CG}. \\ - \overline{AH'} - \overline{FG'} - \overline{CH'} + \overline{CG'}. \end{array}\right.$$

Alles, was wir vom Punkte $B$ gesagt haben, ist sichtbar auf ihn anwendbar, so lange er nicht aus dem zweyten Viertel des Umkreises geht, weil dann keine von den aufgezählten Quantitäten weder durch 0, noch durch $\infty$ gehen und so ihr Zeichen der Correlation verändern wird; also hat diese Tafel der Correlation statt für das ganze zweyte Viertel des Umkreises, und drückt die Substitutionen aus, die man in den Formeln des Systems $ABCDEFGH$ machen müsste, um diese Formeln auf das System $AB'CD'E'FG'H'$ anwendbar zu machen.

Ich gehe zum dritten Viertel des Umkreises über, indem ich jetzt das zweyte, welches wir eben untersucht haben, ihm zum Maasstab zur Vergleichung dienen lasse.

108. Ich nehme also an, dass der Punkt $B'$ nach $B''$ gehe, indem er zuvor durch den Punkt $A'$ gegangen ist, und stelle das neue System dar, indem ich, Schritt vor Schritt, der Construktion des ersten folge; d. h. vom neuen Punkte $B''$ ziehe ich die Perpendikel $\overline{B''D''}$, $\overline{B''E''}$ auf den Durchmesser $\overline{AA'}$, $\overline{FF'}$; durch den Punkt $A$, der immer Ursprung des Bogens ist, führe ich die unbestimmte Tangente $\overline{H'AH''}$, die beym Ziehen sich mit der in den vorigen Systemen vermischt; durch den Mittelpunkt $C$ und den Punkt $B''$ führe ich die unbestimmte Se-

cante $\overline{B''CG''}$, und endlich durch $F$, den Endpunkt des erſten Viertels des Umkreiſes, ziehe ich die unbeſtimmte Tangente $\overline{GFG}$, die beym Ziehen ſich mit der der vorigen Syſteme vermiſcht.

Dieſs feſtgeſetzt, ſo iſt es augenſcheinlich, daſs man die Correlation der Conſtruktion ſo darſtellen wird:

2tes Syſtem $A\,B'\,C\,D'\,E'\,F\,G'\,H'$

3tes Syſtem $AB''CD''E''FG''H''$.

Und indem wir hiervon ausgehen, errichten wir leicht folgende Correlation der Conſtruktion:

2tes Syſtem $\left\{\widehat{ABB'},\ \widehat{AF},\ \widehat{FB'},\ \overline{AC},\ \overline{FC},\ \overline{B'C},\right.$

3tes Syſtem $\left\{\widehat{ABB'B''},\ \widehat{AF},\ \widehat{FB'B''},\ \overline{AC},\ \overline{FC},\ \overline{B''C},\right.$

$\left\{\overline{B'D'},\ \overline{CE'},\ \overline{AD'},\ \overline{B'E'},\ \overline{CD},\ \overline{FE'},\ \overline{AH'},\ \overline{FG'},\right.$

$\left.\overline{B''D''},\ \overline{CE''},\ \overline{AD''},\ \overline{B''E''},\ \overline{CD},\ \overline{FE''},\ \overline{AH''},\ \overline{FG''},\right.$

$\left\{\overline{CH'},\ \overline{CG'}.\right.$

$\left.\overline{CH''},\ \overline{CG''}.\right.$

Es bleibt uns übrig die Correlation der Zeichen aufzuſtellen. Hierzu muſs man jede der Quantitäten des neuen Syſtems insbeſondere betrachten und ſie mit der ihr im vorigen Syſtem entſprechenden vergleichen, welches jetzt als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen wird. Wenn die ſo zwey und zwey verglichenen Quantitäten unter ſich direkt geblieben ſind, behalten ihre Werthe dieſelben Zeichen der Correlation; d. h. man muſs jedem im dritten Syſteme daſſelbe Zeichen der Correlation geben, was der ihm entſprechende im zweyten hat, und ſind dieſe Quantitäten in Hinſicht auf einander invers geworden, ſo muſs man jedem der Werthe, die ſich

im

im dritten Syſteme finden, ein Zeichen der Correlation geben, welches dem des ihm im zweyten Syſteme entſprechenden Werths entgegengeſetzt iſt. Da $\widehat{ABB'}$ weder durch o, noch durch $\infty$ gegangen iſt, um $\widehat{ABB'B''}$ zu werden, ſo bleibt er, wie er im vorigen Syſteme war, d. h. ſein Zeichen der Correlation im dritten Syſteme iſt auch +.

$\widehat{FB'}$ iſt eben ſo wenig durch o als durch $\infty$ gegangen, um $\widehat{FB'B''}$ zu werden, und muſs alſo daſſelbe Zeichen der Correlation behalten, was er im zweyten Syſteme hatte, d. h. —.

Verfährt man ſo bey jeder andern Quantität, ſo wird man folgende Correlation der Zeichen für das dritte Syſtem darſtellen:

$$+\widehat{ABB'B''} + \widehat{AF} - \widehat{FB'B''} + \overline{AC} + \overline{FC} + \overline{B''C}$$
$$- \overline{B''D''} - \overline{CE''} + \overline{AD''} - \overline{B''E''} - \overline{CD''}$$
$$+ \overline{FE''} + \overline{AH''} + \overline{FG''} - \overline{CH''} - \overline{CG''}.$$

Was wir hier vom Punkte $B''$ geſagt haben, iſt offenbar auf ihn anwendbar, ſo lange er nicht aus dem dritten Viertel des Umkreiſes geht, weil dann keine der aufgezählten Quantitäten weder durch o, noch durch $\infty$ gegangen ſeyn wird. Alſo haben die vorher gefundenen Zeichen der Correlation für das ganze dritte Viertel des Umkreiſes ſtatt, und zeigen die Veränderungen an, die man in den Formeln des Urſyſtems machen muſs, um ſie auf dieſes dritte Viertel des Umkreiſes anwendbar zu machen. Jetzt müſſen wir noch unterſuchen, was für das vierte Viertel ſtatt hat.

109. Ich nehme dabey das eben unterſuchte dritte Viertel als Maaſsſtab zur Vergleichung an.

Wir wollen alſo uns vorſtellen, daſs $B''$ die Stellung in $B'''$ annehme, nachdem er zuvor durch $F'$ gegangen iſt. Um das neue Syſtem zu gründen, wollen wir auch die Perpendikel $\overline{B'''D'''}$, $\overline{B'''E'''}$ auf die Durchmeſſer $\overline{AH'}$, $\overline{FF'}$ ziehen; ferner die unbeſtimmte Tangente $\overline{HAH'}$ durch den erſten Punkt des Bogens $A$; ſodann die Secante $\overline{CB'''H'''}$ und endlich die Tangente $\overline{GFG'''}$, durch $F$ das Ende des erſten Viertels des Umkreiſes, wie in den vorigen Syſtemen.

Das neue Syſtem wird alſo, wenn wir, wie vorher, der Ordnung der Conſtruktion folgen, $AB'''CD'''E'''FG'''H'''$ ſeyn; und verfährt man ferner wie vorher, ſo ſtellt man folgende Correlation der abſoluten Werthe und der Zeichen für das vierte Syſtem dar:

$$\mp\widehat{ABB'B''B'''},\ +\widehat{AF},\ -\widehat{FB'B''B'''},\ +\overline{AC},\ +\overline{FC},$$
$$+\overline{B'''C},\ -\overline{B'''D'''},\ -\overline{CE'''},\ +\overline{AD'''},\ +\overline{B'''E'''},$$
$$+\overline{CD'''},\ +\overline{FE'''},\ -\overline{AH'''},\ -\overline{FG'''},\ +\overline{CH'''},$$
$$-\overline{CG'''}.$$

Noch mehr, was ich vom Punkte $B'''$ geſagt habe, iſt ſichtbar auf ihn anwendbar, ſo lange er nicht aus dem vierten Viertel des Umkreiſes geht. Alſo haben die vorher geſundenen Zeichen der Correlation ſtatt für das ganze vierte Viertel, und zeigen die Veränderungen an, die man in den Formeln des Urſyſtems machen muſs, um ſie auf dieſs vierte Viertel anwendbar zu machen.

110. Man könnte noch ein fünftes Syſtem bilden, wenn man annimmt, daſs der Punkt $B'''$ auf ſeine erſte Stellung $B$ zurückkommt, nachdem er durch $A$ gegangen iſt; ferner ein ſechſtes, wenn man

ſich vorſtellt, er ſtelle ſich von neuem in $B'$, nachdem er nochmals durch $F$ gegangen iſt u. ſ. w. Aber die Quantitäten dieſer neuen Syſteme werden nur durch den Werth der Bogen von den erſten unterſchieden ſeyn, die gröſser als der Umfang werden würden; d. h. für das fünfte Syſtem z. B. würde der Bogen nicht $\widehat{AB}$ ſeyn, wie der vorige, ſondern der ganze Umkreis *plus* $\widehat{AB}$, indeſs alle in dieſem fünften Syſteme gezogenen geraden Linien dieſelben wie im erſten Syſteme blieben. Derſelbe Fall würde auch beym ſechſten Syſteme eintreten, wenn es mit dem zweyten, beym ſiebenten, wenn es mit dem dritten verglichen wird u. ſ. w. Man kann alſo alle möglichen Syſteme auf die vier ſchon unterſuchten zurückführen.

Jetzt wollen wir die vier Syſteme in einer Tafel vereinigen, und weil die Correlation ſich nicht verändert, ſo lange die Punkte $B$, $B'$, $B''$, $B'''$ jeder in dem ihm angewieſenen Viertel des Umkreiſes bleiben, ſo können wir wegen mehrerer Einfachheit annehmen, daſs $E$ und $E'$ in einander fallen (*Fig.* 41.), ſo wie $E''$ und $E'''$, $D$ und $D'''$, $D'$ und $D''$, woraus wir erhalten

$$\overline{BD} = \overline{B'D'} = \overline{B''D''} = \overline{B'''D'''}, \text{ und}$$
$$\overline{BE} = \overline{B'E'} = \overline{B''E''} = \overline{B'''E'''}.$$

Die allgemeine Tafel der Correlation der vier Syſteme ſtellt man alſo auf folgende Art dar. Man hat der Kürze wegen die beſtändigen Quantitäten $\widehat{AF}$, $\widehat{AC}$ und eine von denen, die doppelt da ſind, wie $BD$, $CE$, unterdrückt.

## Allgemeine Tafel der Correlation der vier Syſteme:

| | | |
|---|---|---|
| Syſtem des erſten Viertels des Umkreiſes | $+\overset{\frown}{AB}$ | $+\overset{\frown}{FB}$ |
| Syſtem des zweyten Viertels des Umkreiſes | $+\overset{\frown}{ABB'}$ | $-\overset{\frown}{FB'}$ |
| Syſtem des dritten Viertels des Umkreiſes | $+\overset{\frown}{ABB'B''}$ | $-\overset{\frown}{FB'B''}$ |
| Syſtem des vierten Viertels des Umkreiſes | $+\overset{\frown}{ABB'B''B'''}$ | $-\overset{\frown}{FB'B''B'''}$ |

$$\begin{cases} +\overline{BD}+\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{FE}+\overline{AH}+\overline{FG}+\overline{CH}+\overline{CG}. \\ +\overline{BD}+\overline{AD'}-\overline{BE}+\overline{FE}-\overline{AH}-\overline{FG}-\overline{CH}+\overline{CG}. \\ +\overline{BD}+\overline{AD'}-\overline{BE}+\overline{FE''}+\overline{AH}+\overline{FG}-\overline{CH}-\overline{CG}. \\ -\overline{BD}+\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{FE''}-\overline{AH}-\overline{FH}+\overline{CH}-\overline{CG}. \end{cases}$$

Vermittelſt dieſer vergleichenden Tafel braucht man nur, wenn die Eigenſchaften des Urſyſtems, d. h. des erſten Viertels des Umkreiſes, durch Formeln unter den vorher aufgerechneten Quantitäten ausgedrückt ſind, um dieſe Formeln auf irgend einen andern Punkt des Umkreiſes anwendbar zu machen, die darin angezeigten Veränderungen der Zeichen vorzunehmen, nachdem ſich das zweyte Ende des Bogens, deſſen Urſprung in $A$ iſt, auf dem zweyten, dritten oder vierten Viertel des Umkreiſes befindet.

Es iſt augenſcheinlich, daſs man eben ſo auf irgend eines der vier Syſteme die Formeln für irgend eines der andern anwenden kann, wenn man die Zeichen verändert, die in den zwey Syſtemen verſchieden ſind.

111. Die Resultate dieser Tafel können auf eine sehr einfache Regel zurückgebracht werden, die mit dem übereinstimmt, was ich (38) über die Wurzeln der Gleichung gesagt habe, die zwischen den Coordinaten derselben Curve besteht.

1) Das Zeichen der Correlation von $\overline{BD}$ ist +, so lange der Punkt $B$ über dem Durchmesser $AA'$ ist, und —, wenn er darunter ist.

2) Das Zeichen der Correlation von $\overline{BE}$ ist +, so lange der Punkt $B$ links von $FF'$ ist, und —, wenn er rechts geht.

3) In Hinsicht der übrigen Quantitäten des Systems, da sie alle Funktionen von $BD$, $BE$ und beständigen Quantitäten sind, so nimmt man sie direkt oder invers an, nachdem ihre Werthe, so ausgedrückt mit den angezeigten Veränderungen der Zeichen, ein positives oder negatives Resultat geben (27). Z. B. wenn der wandernde Punkt $B''$ ist und man die Secante $\overline{CH''}$ haben will, so nimmt man diese Proportion, welche die ähnlichen Dreyecke $CH''A$ und $CB''D''$ geben;

$$\overline{CH''} : \overline{AC} = \overline{CB''} : \overline{CD''} \text{ oder } \overline{CH''} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB''}}{\overline{CD''}}.$$

Aber nach dem zweyten Theile der eben aufgestellten Regel, hat $\overline{CD''}$ — zum Zeichen der Correlation, während dass $\overline{AC}$, $\overline{CB''}$ beyde + haben: also ist das Zeichen der Correlation von $\overline{CH''}$ —, also ist $\overline{CH''}$ invers; d. h. die Secante jedes Bogens, der gröfser ist als der halbe Umkreis, und kleiner als $\frac{3}{4}$

deſſelben, iſt invers und ihr Werth der Correlation negativ.

112. Dieſs iſt ein neuer Beweis, daſs die Regel, welche man gewöhnlich giebt, um das Zeichen zu beurtheilen, welches eine Quantität annehmen muſs, wenn das allgemeine Syſtem ſich verändert hat, unbeſtimmt und ſelbſt nicht richtig iſt. Dieſe Regel iſt nämlich, daſs das Zeichen ſich nur ändert, wenn man die Linien nach einer andern Richtung annimmt, als man ihnen anfangs beylegte. Nun fällt die Secante des dritten Viertels des Umkreiſes genau in Hinſicht der Gröſse und der Richtung in die Secante des Urſyſtems, ſie ſollte alſo + zum Zeichen der Correlation haben, und doch iſt es gewiſs, daſs ſie — hat.

Dieſe Regel iſt ſonſt auch augenſcheinlich unzulänglich (wie ich ſchon (42) bemerkt habe) für den Fall, wo die Richtungen der Linien weder in der urſprünglichen, noch in der entgegengeſetzten Richtung ſind. Wie kann man z. B. wiſſen, ob $\overline{CH}$ und $\overline{CH'}$, welche die ſich entſprechenden Secanten im erſten und zweyten Viertel des Umkreiſes ſind, einerley Zeichen haben, oder nicht? Denn da dieſe beyden Linien einen Winkel machen, kann man weder ſagen, daſs ſie in derſelben, noch daſs ſie in entgegengeſetzter Richtung ſind.

113. Es erheben ſich noch andere Schwierigkeiten, denn man kann z. B. fragen, ob der Halbmeſſer $\overline{CA}$ und der Halbmeſſer $\overline{CA'}$, die in entgegengeſetzter Richtung genommen ſind, daſſelbe Zeichen in den Formeln haben müſſen, oder wenn man $+\overline{CA}$ annimmt, ob man $-\overline{CA'}$ ſetzen muſs? Es iſt gewiſs,

dafs, da $\overline{CA}$ eine beſtändige Quantität iſt, ihr Zeichen der Correlation auch + ſeyn mufs, und doch ſcheint es, als wenn man ihr nach der Regel — geben müſste, wenn ſie $\overline{CA'}$ wird, weil ſie dann in entgegengeſetzter Richtung von $\overline{CA}$ genommen iſt. Man wird vielleicht ſagen, dafs die Regel nicht auf beſtändige Quantitäten anwendbar ſey; aber ſie führt keine Ausnahmen an, und zugegeben, dafs ſie dieſe hätte, ſo kann man noch immer fragen, welches der Grund dieſes Unterſchiedes zwiſchen veränderlichen und beſtändigen Quantitäten ſey? Denn die Regel gründet ſich nicht auf abſoluten Werth der verglichenen Linien, ſondern auf ihre jedesmaligen Stellungen.

114. Endlich kann man noch folgende Einwendung gegen dieſe Regel machen. $\overline{BE}$ iſt, ſagt man, poſitiv, und $\overline{B'E}$ negativ; weil alſo dieſe Linien an ſich gleich ſind, ſo hat man $\overline{B'E} = -\overline{BE'}$, alſo wird $\overline{BB'}$, welches $\overline{BE} + \overline{B'E}$ iſt, $\overline{BE} - \overline{BE'} = 0$, oder $\overline{BB'} = 0$, was ungereimt iſt. Eben ſo hätte man $\overline{BB'''} = \overline{BD} + \overline{B'''D}$, was, weil $\overline{B'''D}$ negativ iſt, auch o wird, alſo hat man auch $\overline{BB'''} = 0$; ein anderes Reſultat, was mit der geſunden Vernunft ſtreitet. Indeſs nimmt man dieſe beyden Reſultate der Regel an, ſo hat man $\overline{BB'}.\overline{BB'''} = 0$, woraus z. B. folgt, dafs das in einem Kreiſe beſchriebene Parallelogramm (alſo jedes) = o ſey. Man fühlt gewifs, dafs, wenn man ähnliche Schlüſſe in der Mathematik zuliefse, dieſe Wiſſenſchaft der Evidenz bald ſo entartet ſeyn würde, dafs man ſich nicht mehr verſtände. Alſo iſt dieſe Regel in der That nicht

richtig, und beruht nicht einmal auf ſcheinbaren Gründen. Man giebt ſie bloſs als eine Uebereinkunft, die man gemacht hat, um die verſchiedenen Lagen der Linien zu unterſcheiden. Aber das kann man nicht durch eine Uebereinkunft thun, wenn man nicht, indem man die Zeichen + und — braucht, um die Stellungen zu unterſcheiden, dabey zugleich beweiſet, daſs man das Recht hat, ſie eben ſo zu gebrauchen, als wenn man bloſs dadurch Addition und Subtraktion anzeigen will. Warum, da man ferner die Richtungen der poſitiven und negativen Linien willkührlich beſtimmen kann, warum iſt nicht alles auf beyden Seiten gleich? und warum, wenn man eine poſitive Linie mit einer negativen multiplicirt, hat die poſitive das Vorrecht, ihr Zeichen dem Produkte zu geben?

Der Durchmeſſer des Umkreiſes $AFA'F$ ſey durch 1 vorgeſtellt, der vierte Theil des Umkreiſes durch $\pi$, $\overline{AB}$ durch $a$, ſo haben wir

$$\widehat{AB} = a,\quad \widehat{ABB'} = 2\pi - a,\quad \widehat{ABB'B''} = 2\pi + a,$$
$$\widehat{ABB'B''B'''} = 4\pi - a,\quad \widehat{BF} = \pi - a,\quad \widehat{FB'} = \pi - a,$$
$$\widehat{FB'B''} = \pi + a,\quad \widehat{FB'B''B'''} = 3\pi - a,\quad \overline{BD} = \mathit{fin}\, a,$$
$$\overline{BE} = \mathit{cof}\, a,\quad \overline{AD} = \mathit{fin}\, v.\, a,\quad \overline{FE} = \mathit{cof}\, v.\, a,$$
$$\overline{AD} = 2 - \mathit{fin}\, v.\, a,\quad \overline{AH} = \mathit{tang}\, a,\quad \overline{FG} = \mathit{cot}\, a,$$
$$\overline{CH} = \mathit{fec}\, a,\quad \overline{CG} = \mathit{cofec}\, a,\quad \overline{FE''} = 2 - \mathit{cof}\, v.\, a.$$

Setzt man dieſe Werthe in die vorige allgemeine Tafel der Correlation, ſo erhält ſie folgende Geſtalt:

| | | |
|---|---|---|
| Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das erſte Viertel des Umkreiſes fällt | $+ a$, | $+ (\pi - a)$, |
| Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das zweyte Viertel des Umkreiſes fällt | $+ (2\pi - a)$, | $- (\pi - a)$, |
| Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das dritte Viertel des Umkreiſes fällt | $+ (2\pi + a)$, | $- (\pi + a)$, |
| Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das vierte Viertel des Umkreiſes fällt | $+ (4\pi - a)$, | $- (3\pi - a)$, |

$$\begin{cases} + \mathit{ſin}\ a, & + \mathit{coſ}\ a, & + \mathit{tang}\ a, & + \mathit{cot}\ a, & + \mathit{ſec}\ a, \\ + \mathit{ſin}\ a, & - \mathit{coſ}\ a, & - \mathit{tang}\ a, & - \mathit{cot}\ a, & - \mathit{ſec}\ a, \\ - \mathit{ſin}\ a, & - \mathit{coſ}\ a, & + \mathit{tang}\ a, & + \mathit{cot}\ a, & - \mathit{ſec}\ a, \\ - \mathit{ſin}\ a, & + \mathit{coſ}\ a, & - \mathit{tang}\ a, & - \mathit{cot}\ a, & + \mathit{ſec}\ a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} + \mathit{coſec}\ a, & + \mathit{ſin\ v.}\ a, & + \mathit{coſ\ v.}\ a. \\ + \mathit{coſec}\ a, & + 2 - \mathit{ſin\ v.}\ a, & + \mathit{coſ\ v.}\ a. \\ - \mathit{coſec}\ a, & + 2 - \mathit{ſin\ v.}\ a, & + 2 - \mathit{coſ\ v.}\ a. \\ - \mathit{coſec}\ a, & + \mathit{ſin\ v.}\ a, & + 2 - \mathit{coſ\ v.}\ a. \end{cases}$$

Dieſe Tafel iſt für jeden Werth von $a$, der kleiner iſt als $\pi$. Wenn wir alſo annehmen, daſs $b$ das Complement von $a$ ſey, ſo hat dieſelbe Tafel ſtatt, wenn man darin $b$ für $a$ ſetzt. Alſo weil nach der Hypotheſe $b = \pi - a$, ſo hat dieſelbe Tafel auch ſtatt, wenn man darin $\pi - a$ ſtatt $a$ ſetzt und folglich

*cos a* für *sin a*, *sin a* für *cos a*, *cot a* für *tang a* u. s. w. Durch diese Substitution wird die Tafel:

| | | |
|---|---|---|
| System der Bogen, deren letzter Punkt auf das erste Viertel des Umkreises fällt | $+(\pi - a)$, | $+a$, |
| System der Bogen, deren letzter Punkt auf das zweyte Viertel des Umkreises fällt | $+(\pi + a)$, | $-a$, |
| System der Bogen, deren letzter Punkt auf das dritte Viertel des Umkreises fällt | $+(3\pi - a)$, | $-(2\pi - a)$, |
| System der Bogen, deren letzter Punkt auf das vierte Viertel des Umkreises fällt | $+(3\pi + a)$, | $+(2\pi + a)$, |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $+\cos a$, | $+\sin a$, | $+\cot a$, | $+\tang a$, | $+\operatorname{cosec} a$, |
| $+\cos a$, | $-\sin a$, | $-\cot a$, | $-\tang a$, | $-\operatorname{cosec} a$, |
| $-\cos a$, | $-\sin a$, | $+\cot a$, | $+\tang a$, | $-\operatorname{cosec} a$, |
| $-\cos a$, | $+\sin a$, | $-\cot a$, | $-\tang a$, | $+\operatorname{cosec} a$, |

| | | |
|---|---|---|
| $+\sec a$, | $+\operatorname{cos v.} a$, | $+\operatorname{sin v.} a$. |
| $+\sec a$, | $+2-\operatorname{cos v.} a$, | $+\operatorname{sin v.} a$. |
| $-\sec a$, | $+2-\operatorname{cos v.} a$, | $+2-\operatorname{sin v.} a$. |
| $-\sec a$, | $+\operatorname{cos v.} a$, | $+2-\operatorname{sin v.} a$. |

115. Nachdem ich untersucht habe, was statt findet, wenn der Punkt *B* sich nach der Richtung $BB'B''B'''$ bewegt, so will ich untersuchen, was ge-

schieht, wenn er sich nach der entgegengesetzten Richtung $BB'''B''B'$ bewegt.

Hierzu wollen wir das neue System $AB'''CD'''E'''FG'''H'''$ mit dem des ersten Viertels vergleichen, welches man als aus dem Umlauf des Punktes $B$ in der Richtung $BB'''B''B'$ entstanden betrachtet, und dann die Correlation der absoluten Werthe und Zeichen der beyden Systeme darstellen, die folgende seyn wird:

$$\begin{array}{l} \text{Ursystem} \\ \text{umgeformtes System} \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} +\widehat{AB}, & +\widehat{FB}, & +\overline{BD}, \\ -\widehat{AB'''}, & +\widehat{FAB'''}, & -\overline{B'''D'''}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lllll} +\overline{AD}, & +\overline{BE}, & +\overline{FE}, & +\overline{AH}, & +\overline{FG}, \\ +\overline{AD'''}, & +\overline{B'''E'''}, & +\overline{F'E'''}, & -\overline{AH'''}, & -\overline{FG'''}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} +\overline{CH}, & +\overline{CG}. \\ +\overline{CH'''}, & -\overline{CG'''}. \end{array} \right.$$

In der That müsste $\overline{AB}$ durch o gehen, um $\overline{AB'''}$ zu werden, in dem Augenblicke, wo der Punkt $B$, der sich nach der Hypothese in der Richtung $BB'''B''B'$ herum bewegt, in den Punkt $A$ fiel. Also konnte $\overline{AB}$ invers werden, um $\overline{AB'''}$ zu werden, und diess trifft wirklich ein, denn im Ursystem hatte man $\widehat{AB} = \widehat{AF} - \widehat{FB}$, und im umgeformten System hat man im Gegentheil $\widehat{AB'''} = \widehat{FB'''} - \widehat{AF'''}$; also ist das Zeichen der Correlation von $\widehat{AB'''}$ —, weil weder $\widehat{FB}$, noch $\widehat{AF}$ durch o oder durch $\infty$ gegangen sind. Also muss auch $\widehat{FB}$, das weder durch o, noch durch $\infty$ gegangen ist, + zum Zeichen der Correlation haben.

Im Ursystem hat man $\overline{BD} = \overline{FC} - \overline{FE}$, im umgeformten im Gegentheil $\overline{B'''D'''} = \overline{FE'''} - \overline{FC}$;

alſo iſt $\overline{B'''D'''}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —. Eben ſo bey den andern. Nimmt man jetzt an, daſs $B$ nach $B'''$ gekommen, noch fortfahre ſich in derſelben Richtung herum zu bewegen, bis es nach $B''$ kommt, und von da nach $B'$, und man immer dieſelben Betrachtungen dabey anſtelle, die wir für den Fall anſtellten, wo er nach der entgegengeſetzten Richtung ſich bewegte, ſo kommt man offenbar auf folgende zwey neue Tafeln, die den vorher gegebenen entſprechen, und woraus man ſieht, daſs überhaupt die Bogen, deren Werth der Correlation mit dem Zeichen — afficirt iſt, inverſe Bogen bezeichnen, nach der Richtung $AB'''B''B'B$ genommen.

| | | |
|---|---|---|
| Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das erſte Viertel des Umkreiſes fällt | $-(4\pi - a)$, | $+(5\pi - a)$, |
| Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das zweyte Viertel des Umkreiſes fällt | $-(2\pi + a)$, | $+(3\pi + a)$, |
| Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das dritte Viertel des Umkreiſes fällt | $-(2\pi - a)$, | $+(3\pi - a)$, |
| Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das vierte Viertel des Umkreiſes fällt | $-a$, | $+(\pi + a)$, |

$$\begin{cases} + \sin a, & + \cos a, & + \tang a, & + \cot a, & + \sec a, \\ + \sin a, & - \cos a, & - \tang a, & - \cot a, & - \sec a, \\ - \sin a, & - \cos a, & + \tang a, & + \cot a, & - \sec a, \\ - \sin a, & + \cos a, & - \tang a, & - \cot a, & + \sec a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} + \cos a, & + \sin v.\, a, & + \cos v.\, a. \\ + \cos a, & + 2 - \sin v.\, a, & + \cos v.\, a. \\ - \cos a, & + 2 - \sin v.\, a, & + 2 - \cos v.\, a. \\ - \cos a, & + \sin v.\, a, & + 2 - \cos v.\, a. \end{cases}$$

| | | |
|---|---|---|
| System der Bogen, deren letzter Punkt auf das erſte Viertel des Umkreiſes fällt | $-(3\pi + a)$, | $+(4\pi + a)$, |
| System der Bogen, deren letzter Punkt auf das zweyte Viertel des Umkreiſes fällt | $-(3\pi - a)$, | $+(4\pi - a)$, |
| System der Bogen, deren letzter Punkt auf das dritte Viertel des Umkreiſes fällt | $-(\pi + a)$, | $+(2\pi + a)$, |
| System der Bogen, deren letzter Punkt auf das vierte Viertel des Umkreiſes fällt | $-(\pi - a)$, | $-(2\pi - a)$, |

$$\begin{cases} + \cos a, & + \sin a, & + \cot a, & + \tang a, & + \cosec a, \\ + \cos a, & - \sin a, & - \cot a, & - \tang a, & - \cosec a, \\ - \cos a, & - \sin a, & + \cot a, & + \tang a, & - \cosec a, \\ - \cos a, & + \sin a, & - \cot a, & - \tang a, & + \cosec a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} + \mathit{sec}\ a, & + \mathit{cof}\ v.\ a, & + \mathit{fin}\ v.\ a. \\ + \mathit{sec}\ a, & + 2 - \mathit{cof}\ v.\ a, & + \mathit{fin}\ v.\ a. \\ - \mathit{sec}\ a, & + 2 - \mathit{cof}\ v.\ a, & + 2 - \mathit{fin}\ v.\ a. \\ - \mathit{sec}\ a, & + \mathit{cof}\ v.\ a, & + 2 - \mathit{fin}\ v.\ a. \end{cases}$$

Da das Urſyſtem, auf das ſich dieſe vier Tafeln beziehen, immer das erſte Viertel des Umkreiſes iſt, d. h. das der Bogen $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AF}$, $\overset{\frown}{BF}$, und der Linien $BD$, $BE$, $AD$ u. ſ. w., ſo folgt, daſs in jeder der vier horizontalen Linien von jeder der vier Tafeln der erſte Ausdruck den correlativen Werth des Bogens, der $\overset{\frown}{AB}$ entſpricht, bezeichnet, der zweyte den correlativen Werth ſeines Complements, der dritte den correlativen Werth ſeines Sinus, der vierte den correlativen Werth ſeines Coſinus u. ſ. w., d. h. alle dieſe Werthe, ſind bloſse algebraiſche Formen, welche die Eigenſchaft haben, daſs, wenn ſie ſtatt der wahren Quantitäten, welche ſie vorſtellen, in eine Rechnung geſetzt werden, welche auf die Hypotheſe gegründet iſt, daſs die Bogen poſitiv und kleiner als $\pi$ wären, ſie dieſe Reſultate auf alle andere Bogen anwendbar machen, die in jeder Richtung von 0, bis zum ganzen Umkreiſe $4\pi$ begriffen ſind.

116. Vereinigt man dieſe vier Tafeln, ſo erhält man dieſe Reihe von Gleichungen.

1.
$$\begin{cases} \sin \pm a = \pm \sin a \\ \cos \pm a = + \cos a \\ \tang \pm a = \pm \tang a \\ \cot \pm a = \pm \cot a \\ \sec \pm a = + \sec a \\ \operatorname{cosec} \pm a = \pm \cos a \\ \sin v. \pm a = + \sin v. a \\ \cos v. + a = + \cos v. a \\ \cos v. - a = + (2 - \cos v. a) \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \sin (\pi \pm a) = + \cos a \\ \cos (\pi \pm a) = \mp \sin a \\ \tang (\pi \pm a) = \mp \cot a \\ \cot (\pi \pm a) = \mp \tang a \\ \sec (\pi \pm a) = \mp \operatorname{cosec} a \\ \operatorname{cosec} (\pi \pm a) = + \sec a \\ \sin v. (\pi + a) = + (2 - \cos v. a) \\ \sin v. (\pi - a) = + \cos v. a \\ \cos v. (\pi \pm a) = + \sin v. a \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \sin (2\pi \pm a) = \mp \sin a \\ \cos (2\pi \pm a) = - \cos a \\ \tang (2\pi \pm a) = \pm \tang a \\ \cot (2\pi \pm a) = \pm \cot a \\ \sec (2\pi \pm a) = - \sec a \\ \operatorname{cosec} (2\pi \pm a) = \mp \cos a \\ \sin v. (2\pi \pm a) = + (2 - \sin v. a) \\ \cos v. (2\pi + a) = + (2 - \cos v. a) \\ \cos v. (2\pi - a) = + \cos v. a \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \sin(3\pi \pm a) = -\cos a \\ \cos(3\pi \pm a) = \pm \sin a \\ \tang(3\pi \pm a) = \mp \cot a \\ \cot(3\pi \pm a) = \mp \tang a \\ \sec(3\pi \pm a) = \pm \operatorname{cosec} a \\ \operatorname{cosec}(3\pi \pm a) = -\sec a \\ \sin v.(3\pi + a) = +\cos v. a \\ \sin v.(3\pi - a) = +(2 - \cos v. a) \\ \cos v.(3\pi \pm a) = +(2 - \sin v. a) \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} \sin(4\pi \pm a) = \pm \sin a \\ \cos(4\pi \pm a) = +\cos a \\ \tang(4\pi \pm a) = \pm \tang a \\ \cot(4\pi \pm a) = \pm \cot a \\ \sin(4\pi \pm a) = +\sec a \\ \operatorname{cosec}(4\pi \pm a) = \pm \operatorname{cosec} a \\ \sin v.(4\pi \pm a) = +\sin v. a \\ \cos v.(4\pi + a) = +\cos v. a \\ \cos v.(4\pi - a) = (2 - \cos v. a). \end{cases}$$

Dieſe Gleichungen werden ſo gebildet. Ich ſehe z. B. aus der zweyten Zeile der erſten Tafel, daſs $(2\pi - a)$ einer von den correlativen Werthen des Bogens $a$ iſt, alſo iſt der correlative Werth ſeines Sinus $\sin(2\pi - a)$; aber von einer andern Seite ſehe ich aus dem dritten Ausdruck derſelben Linie, daſs $+\sin a$ auch der correlative Werth des Sinus eben des Bogens $(2\pi - a)$ iſt. Ich ſchlieſse alſo, daſs $\sin(2\pi - a) = +\sin a$. Eben ſo, da der erſte Ausdruck der correlative Werth von $a$ iſt, wird der correlative Werth des Coſinus dieſes Bogens $(2\pi - a) = \cos(2\pi - a)$ ſeyn; aber von einer andern Seite ſehe ich aus dem vierten

vierten Ausdruck derſelben Zeile, daſs derſelbe correlative Werth $= -\mathit{cof}\ a$ iſt; ich ſchlieſse alſo, daſs $\mathit{cof}\ (2\pi - a) = -\mathit{cof}\ a$. Eben ſo wird mit den andern verfahren.

Dieſe Gleichungen ſind, wie man ſieht, rein algebraiſch, d. h. ſie beſtehen nicht unter wirklichen Quantitäten, ſondern unter ihren correlativen Werthen, und bedeuten, daſs man in jeder Rechnung dieſe correlativen Werthe für die wirklichen Quantitäten des Urſyſtems ſetzen kann, welche ſie darſtellen, ohne der Genauigkeit des Reſultats zu ſchaden. Sie machen bloſs dieſes Reſultat anwendbar auf Fälle, die nicht im Urſyſtem begriffen ſind, auf das die Betrachtungen gegründet werden.

117. Setzt man in dieſen Gleichungen $a = 0$, ſo bringt man ſie auf folgende Formeln zurück:

1.
$$\begin{cases} \mathit{ſin}\ 0 = 0 \\ \mathit{cof}\ 0 = 1 \\ \mathit{tang}\ 0 = 0 \\ \mathit{cot}\ 0 = \infty \\ \mathit{ſec}\ 0 = 1 \\ \mathit{cofec}\ 0 = \infty \\ \mathit{ſin\ v.}\ 0 = 0 \\ \mathit{cof\ v.}\ 0 = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \textit{fin}\ \pi = 1 \\ \textit{cof}\ \pi = 0 \\ \textit{tang}\ \pi = \infty \\ \textit{cot}\ \pi = 0 \\ \textit{fec}\ \pi = \infty \\ \textit{cofec}\ \pi = 1 \\ \textit{fin v.}\ \pi = 1 \\ \textit{cof v.}\ \pi = 0 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} \textit{fin}\ 2\pi = 0 \\ \textit{cof}\ 2\pi = -1 \\ \textit{tang}\ 2\pi = -0 \\ \textit{cot}\ 2\pi = -\infty \\ \textit{fec}\ 2\pi = -1 \\ \textit{cofec}\ 2\pi = \infty \\ \textit{fin v.}\ 2\pi = 2 \\ \textit{cof v.}\ 2\pi = 1 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \textit{fin}\ 3\pi = -1 \\ \textit{cof}\ 3\pi = 0 \\ \textit{tang}\ 3\pi = -\infty \\ \textit{cot}\ 3\pi = -0 \\ \textit{fec}\ 3\pi = \infty \\ \textit{cofec}\ 3\pi = -1 \\ \textit{fin v.}\ 3\pi = 1 \\ \textit{cof v.}\ 3\pi = 2 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} \textit{fin}\ 4\pi = 0 \\ \textit{cof}\ 4\pi = 1 \\ \textit{tang}\ 4\pi = 0 \\ \textit{cot}\ 4\pi = \infty \\ \textit{fec}\ 4\pi = 1 \\ \textit{cofec}\ 4\pi = \infty \\ \textit{fin v.}\ 4\pi = 0 \\ \textit{cof v.}\ 4\pi = 1 \end{cases}$$

118. Die bisher gefundenen Formeln beziehen sich nur auf positive oder negative Bogen, von o bis $4\pi$; aber es ist leicht einzusehen, dafs man nichts am Werth der Lineo-angulair-Quantitäten verändert, wenn man zu dem betrachteten Bogen einen oder mehrere ganze Umkreise fügt, sie mögen direkt oder invers seyn; d. h. $4m\pi$, wo $m$ jede positive oder negative ganze Zahl ausdrückt. Die (116) gefundenen Gleichungen können dann in folgende Tafel gebracht werden:

1. $$\begin{cases} \sin(4m\pi \pm a) = \pm \sin a \\ \sin((4m+1)\pi \pm a) = +\cos a \\ \sin((4m+2)\pi \pm a) = \mp \sin a \\ \sin((4m+3)\pi \pm a) = -\cos a \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \cos(4m\pi \pm a) = +\cos a \\ \cos((4m+1)\pi \pm a) = \mp \sin a \\ \cos((4m+2)\pi \pm a) = -\cos a \\ \cos((4m+3)\pi + a) = \pm \sin a \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \tang(4m\pi + a) = +\tang a \\ \tang((4m+1)\pi \pm a) = \mp \cot a \\ \tang((4m+2)\pi \pm a) = \pm \tang a \\ \tang((4m+3)\pi \pm a) = \mp \cot a \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \cot(4m\pi \pm a) = \pm \cot a \\ \cot((4m+1)\pi \pm a) = \mp \tang a \\ \cot((4m+2)\pi \pm a) = \pm \cot a \\ \cot((4m+3)\pi \pm a) = \mp \tang a \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \sec(4m\pi \pm a) = +\sec a \\ \sec((4m+1)\pi \pm a) = \mp \operatorname{cosec} a \\ \sec((4m+2)\pi \pm a) = -\sec a \\ \sec((4m+3)\pi \pm a) = \pm \operatorname{cosec} a \end{cases}$$

$$6.\begin{cases} cosec\ (4m\pi \pm a) & = \pm\ cosec\ a \\ cosec\ ((4m+1)\pi \pm a) & = +\ sec\ a \\ cosec\ ((4m+2)\pi \pm a) & = \mp\ cosec\ a \\ cosec\ ((4m+3)\pi \pm a) & = -\ sec\ a \end{cases}$$

$$7.\begin{cases} fin\ verf\ (4m\pi \pm a) & = +\ fin\ verf\ a \\ fin\ verf\ ((4m+1)\pi \pm a) & = \begin{cases} 2 - cof\ verf\ a \\ +\ cof\ verf\ a \end{cases} \\ fin\ verf\ ((4m+2)\pi \pm a) & = 2 - fin\ verf\ a \\ fin\ verf\ ((4m+3)\pi \pm a) & = \begin{cases} +\ cof\ verf\ a \\ 2 - cof\ verf\ a \end{cases} \end{cases}$$

$$8.\begin{cases} cof\ verf\ (4m\pi \pm a) & = \begin{cases} +\ cof\ verf\ a \\ 2 - cof\ verf\ a \end{cases} \\ cof\ verf\ ((4m+1)\pi \pm a) & = +\ fin\ verf\ a \\ cof\ verf\ ((4m+2)\pi + a) & = \begin{cases} 2 - cof\ verf\ a \\ +\ cof\ verf\ a \end{cases} \\ cof\ verf\ ((4m+3)\pi \pm a) & = 2 - fin\ verf\ a \end{cases}$$

119. In dieſer letzten Tafel nimmt man noch an, daſs der Bogen $a$ wirklich ſey; aber man kann (56) jetzt willkührlich ſein Zeichen oder den natürlichen Coefficienten 1 in irgend ein anderes Zeichen verändern, das man aus den wirklichen oder eingebildeten Wurzeln der Einheit nimmt, ohne daſs dieſe Gleichungen aufhören algebraiſch genau zu ſeyn. Gelangt man durch beliebige regelmäſsige Umformungen dahin, das Unverſtändliche, was ſie enthalten könnten, verſchwinden zu laſſen, ſo werden die Reſultate dann bedeutend und unmittelbar auf die enthaltenen Quantitäten anwendbar ſeyn.

Ich bin bey dieſem bekannten Beyſpiel etwas weitläuftig geweſen, um die vorher aufgeſtellten

Grundſätze mehr zu entwickeln, und zu zeigen, wie weſentlich es iſt, das veränderliche Syſtem ſtets auf ein Urſyſtem zu beziehen, wenn man immer nur auf eine deutliche und dem Geiſte genugthuende Art verfahren will. Noch mehr, dieſer Gang bringt keine neue Schwierigkeiten, dient aber im Gegentheil, um vielen zuvor zu kommen.

Die Erfindung der Lineo-angulär-Quantitäten verdankt ihren Urſprung den Bemühungen, die man gemacht hat, die Auflöſung der Dreyecke zu finden. Man muſste bald gewahr werden, daſs dieſe Auflöſung überhaupt ſich immer auf die der rechtwinklichten Dreyecke zurückbringen läſst. Alſo nahm man als Maaſsſtab zur Vergleichung ein rechtwinklichtes Dreyeck mit gegebener Grundlinie an, deſſen Hypothenuſe z. B. durch 1 vorgeſtellt war; man hat dieſs Dreyeck für alle mögliche Fälle nach dieſer Hypotheſe berechnet, und Tafeln gemacht, wo man dieſe Rechnung ſchon ganz vollendet findet; dieſe Tafeln ſind eben die, welche man Sinustafeln nennt. Lacroix giebt ſchon lange in ſeinen Vorleſungen dieſe richtige und lichtvolle Darſtellung, und mit ihr hat er den Plan ſeiner Trigonometrie gegründet.

120. Eine beliebige gerade Linie $\overline{BC}$ (*Fig.* 42.) ſey als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen; wir wollen ſie durch 1 vorſtellen, und auf derſelben Linie, als Hypothenuſe, ein rechtwinklichtes Dreyeck $ABC$ errichten, indem wir nach und nach den ſpitzen Winkeln alle mögliche Werthe von 0 bis $\pi$ geben. Dann entwerfen wir eine Tafel dieſer Dreyecke; in die erſte Spalte ſetzen wir die Zahl der Grade eines der

Winkel; in die zweyte den Werth der kleinen Seite, die ihm gegenüber ſteht, d. h. die abſtrakte Zahl, die ihn darſtellt, wenn die Hypothenuſe durch 1 ausgedrückt iſt, ſo wie man annahm; in die dritte den Werth der andern kleinen Seite; in die vierte das Verhältniſs der erſten kleinen Seite zur zweyten; in die fünfte das Verhältniſs der zweyten zur erſten; und in die ſechſte endlich den andern ſpitzigen Winkel. Dieſs feſtgeſetzt, ſo ſieht man aus den bekannten Eigenſchaften der rechtwinklichten Dreyecke, daſs die, in die zweyte Spalte geſchriebene, Zahl der Sinus des Winkels iſt, der in der erſten Spalte ſteht; die Zahl der dritten, der Coſinus; die Zahl der vierten, die Tangente; die der fünften, die Cotangente, und endlich die der ſechſten, das Complement des erſten Winkels. Daraus folgt, daſs die Tafel, die aus dieſen verſchiedenen Spalten entſteht, nichts anders iſt, als die gewöhnliche Tafel der Sinus, Coſinus u. ſ. w., und daſs jede Horizontallinie dieſer Tafeln die vollendete Berechnung eines rechtwinklichten Dreyecks iſt, desjenigen nämlich, an deſſen zwey ſpitzigen Winkeln der eine in der erſten, der andere in der letzten Spalte ſteht. Endlich enthält dieſe Horizontallinie nicht allein unter der Benennung, Sinus und Coſinus, die Werthe der kleinen Seiten des Dreyecks, ſondern auch unter der Benennung Tangente, das Verhältniſs der erſten zur zweyten, und unter der Benennung Cotangent, das Verhältniſs der zweyten zur erſten, daſs alſo die Tafel der Sinus, Coſinus u. ſ. w. nichts anders iſt, als die vollſtändig geführte Berechnung aller möglichen Fälle des recht-

winklichten Dreyecks, deſſen Hypothenuſe durch 1 ausgedrückt iſt.

Wenn man alſo ein rechtwinklichtes Dreyeck zu berechnen hat, beſteht die ganze Schwierigkeit darin, die ihm entſprechende Horizontallinie der Tafeln zu finden; denn dieſe Linie iſt die vollſtändig geführte Berechnung für das Dreyeck. Z. B. wenn man die zwey kleinen Seiten $a$, $b$ eines rechtwinklichten Dreyecks kennt, braucht man nur $a$ durch $b$ zu theilen, und der Quotient $\frac{a}{b}$ ſtellt nach dem, was eben geſagt iſt, die Tangente des Winkels vor, der der kleineren Seite $a$ gegenüber ſteht; ſucht man alſo die Zahl $\frac{a}{b}$ in der vierten Spalte, ſo enthält die Horizontallinie der Tafeln, in der ſie ſich findet, die vollſtändig geführte Berechnung des aufgegebenen Dreyecks; d. h. in der erſten und ſechſten Spalte ſind die Winkel, in der zweyten und dritten die Werthe der dieſen Winkeln gegenüberſtehenden Seiten, wenn man die Hypothenuſe $= 1$ annimmt, und endlich in der vierten und fünften die Verhältniſſe dieſer Seiten unter einander, nämlich in der vierten das Verhältniſs der erſten zur zweyten, und in der fünften das der zweyten zur erſten. Da nun der abſolute Werth der Seiten gegeben iſt, erhält man durch eine bloſse Proportion den abſoluten Werth der Hypothenuſe. So geben die Sinustafeln Auflöſung aller möglichen rechtwinklichten Dreyecke; und da man leicht die Berechnung der andern auf Berechnung der rechtwinklichten zurückbringen kann, ſo

ſind die Sinustafeln hinreichend, um alle Dreyecke zu berechnen.

121. Es ſcheint natürlicher, einen Bogen unmittelbar mit ſeiner Sehne ſelbſt zu vergleichen, als mit ſeinem Sinus, der die Hälfte der Sehne eines doppelten Bogens iſt; das that man auch anfangs, und es war möglich, dahin zurückzukommen, ohne daſs die Theorie etwas von ihrer Einfachheit verlöre; ich glaube ſelbſt, daſs ſie in der Hinſicht dabey gewönne, in wiefern man es als eine natürlichere Verkettung betrachten kann.

Man beſchreibe (*Fig.* 42.) auf der Hypothenuſe $\overline{BC}$ eines rechtwinklichten Dreyecks $ABC$ einen Umkreis, ſo wird er durch $A$, den Scheitelpunkt des rechten Winkels, gehen. Nun iſt, wenn man die Hypothenuſe durch 1 vorſtellt, die Seite $\overline{AB}$ der Sinus von $\hat{ACB}$: denn, wenn man aus dem Mittelpunkt $D$ $\overline{DH}$ parallel mit $\overline{AC}$ zieht, ſo fällt ſie auf die Mitte von $\overline{AB}$; alſo (120) der Sinus von $\hat{ADH}$ oder $\hat{ACB}$ iſt $\frac{\overline{AH}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ oder weil $\overline{BC} = 1$ $\mathit{sin}\, ACB = \overline{AB}$, d. h. der Sinus des Winkels $ACB$ iſt gleich der Sehne, auf der er ſteht, in dieſem Cirkel, deſſen Durchmeſſer 1 iſt; und da jeder andere Winkel als $AFB$, der auf derſelben Sehne ſteht und ſeinen Scheitel in der Peripherie hat, daſſelbe Maaſs hat: ſo hat ein jeder ſolcher auch, als Sinus, die Sehne, auf der er in dieſem Cirkel ſteht. Alſo überhaupt in dem Cirkel, deſſen Diameter durch 1 vorgeſtellt iſt, iſt der Sinus jedes Peripheriewinkels gleich der Sehne, auf der er ſteht. Und

weil in Cirkeln von verſchiedenen Durchmeſſern dieſe Durchmeſſer ſich verhalten wie die Sehnen, auf denen gleiche Peripheriewinkel ſtehen, ſo kann man überhaupt ſagen: **der Sinus jedes Peripheriewinkels iſt gleich der Sehne, auf der er ſteht, durch den Durchmeſſer getheilt.**

Aus dieſem Geſichtspunkte werde ich die Theorie der Lineo-angulär-Quantitäten in folgender Aufgabe betrachten.

## Siebente Aufgabe.

122. **Die Tafel der vorzüglichſten Verhältniſſe zwiſchen Sinus und Coſinus zweyer gegebenen Winkel, Sinus und Coſinus ihrer Summe, und Sinus und Coſinus ihres Unterſchiedes, zu bilden.**

$m$ und $n$ ſeyen die beyden gegebenen Winkel, die ich anfangs, jeden einzelnen ſowohl als ihre Summe $m+n$, kleiner als $\pi$ annehme, unter ihnen ſey $m > n$.

Wir wollen willkührlich eine Linie $\overline{AD}$ (*Fig.* 43.) ziehen, und auf der einen Seite dieſer Linie $B\hat{A}D = m$, auf der andern $C\hat{A}D = n$ nehmen. Durch einen willkührlichen Punkt $E$ auf $\overline{AD}$ ziehen wir $BC$ perpendikulär darauf, beſchreiben um das Dreyeck $ABC$ einen Kreis, deſſen Durchmeſſer wir, um es einfacher zu machen, durch 1 vorſtellen; endlich ziehen wir die beyden Linien $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, und nehmen $\overline{EF} = \overline{CE}$, $\overline{EH} = \overline{DE}$; dann wird man folgende Formeln erhalten, welche die geſuchten Verhältniſſe ausdrücken.

Tafel der vorzüglichſten Verhältniſſe zwiſchen Sinus und Coſinus zweyer beliebigen Winkel, Sinus und Coſinus ihrer Summe und Sinus und Coſinus ihres Unterſchiedes.

1) $BD = \sin m$

2) $CD = \sin n$

3) $AC = \cos m$

4) $AB = \cos n$

5) $BC \begin{cases} = \sin (m+n) \\ = \sin m \cos n + \sin m \sin n \end{cases}$

6) $AD \begin{cases} = \cos (m-n) \\ = \cos m \cos n + \sin m \sin n \end{cases}$

7) $BF \begin{cases} = \sin (m-n) \\ = \sin m \cos n - \sin n \cos m \end{cases}$

8) $AH \begin{cases} = \cos (m+n) \\ = \cos m \cos n - \sin m \sin n \end{cases}$

9) $BE \begin{cases} = \sin m \cos n \\ = \frac{1}{2} \sin (m+n) + \frac{1}{2} \sin (m-n) \end{cases}$

10) $CE \begin{cases} = \sin n \cos m \\ = \frac{1}{2} \sin (m+n) - \frac{1}{2} \sin (m-n) \end{cases}$

11) $DE \begin{cases} = \sin m \sin n \\ = \frac{1}{2} \cos (m-n) - \frac{1}{2} \cos (m+n) \end{cases}$

12) $AE \begin{cases} = \cos m \cos n \\ = \frac{1}{2} \cos (m-n) + \frac{1}{2} \cos (m+n) \end{cases}$

123. Aus dieſen erſten Formeln haben die Mathematiker eine Menge anderer abgeleitet, die eben ſo ſcharfſinnig, als wichtig ſind. Die folgende Tafel enthält einige, die ich in der Folge nöthig haben könnte.

## Tafel der vorzüglichſten Verhältniſſe zwiſchen den Lineo-angulär-Quantitäten zweyer beliebigen Winkel.

1.
$$\begin{cases} \mathit{ſin}\ (m \pm n) = \mathit{ſin}\ m\ \mathit{coſ}\ n \pm \mathit{ſin}\ n\ \mathit{coſ}\ m \\ \mathit{coſ}\ (m \pm n) = \mathit{coſ}\ m\ \mathit{coſ}\ n \mp \mathit{ſin}\ m\ \mathit{ſin}\ n \\ \mathit{tang}\ (m \pm n) = \dfrac{\mathit{tang}\ m \pm \mathit{tang}\ n}{1 \mp \mathit{tang}\ m\ \mathit{tang}\ n} \\ \mathit{cot}\ (m \pm n) = \dfrac{1 \mp \mathit{cot}\ m\ \mathit{cot}\ n}{\mathit{cot}\ m \pm \mathit{cot}\ n} \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \mathit{ſin}\ m\ \mathit{coſ}\ n = \frac{1}{2}\mathit{ſin}\ (m+n) + \frac{1}{2}\mathit{ſin}\ (m-n) \\ \mathit{coſ}\ m\ \mathit{ſin}\ n = \frac{1}{2}\mathit{ſin}\ (m+n) - \frac{1}{2}\mathit{ſin}\ (m-n) \\ \mathit{coſ}\ m\ \mathit{coſ}\ n = \frac{1}{2}\mathit{coſ}\ (m+n) + \frac{1}{2}\mathit{coſ}\ (m-n) \\ \mathit{ſin}\ m\ \mathit{ſin}\ n = \frac{1}{2}\mathit{coſ}\ (m-n) - \frac{1}{2}\mathit{coſ}\ (m+n) \\ \mathit{tang}\ m\ \mathit{tang}\ n = \dfrac{\mathit{coſ}\ (m-n) - \mathit{coſ}\ (m+n)}{\mathit{coſ}\ (m+n) + \mathit{coſ}\ (m-n)} \\ \mathit{tang}\ m\ \mathit{cot}\ n = \dfrac{\mathit{ſin}\ (m+n) + \mathit{ſin}\ (m-n)}{\mathit{ſin}\ (m+n) - \mathit{ſin}\ (m-n)} \\ \mathit{cot}\ m\ \mathit{tang}\ n = \dfrac{\mathit{coſ}\ (m+n) + \mathit{coſ}\ (m-n)}{\mathit{ſin}\ (m+n) + \mathit{ſin}\ (m-n)} \\ \mathit{cot}\ m\ \mathit{cot}\ n = \dfrac{\mathit{coſ}\ (m+n) + \mathit{coſ}\ (m-n)}{\mathit{coſ}\ (m-n) - \mathit{coſ}\ (m+n)} \end{cases}$$

3.
$$\left\{\begin{array}{l}
\sin m + \sin n = 2 \sin \frac{m+n}{2} \cdot \cos \frac{m-n}{2} \\
\sin m - \sin n = 2 \cos \frac{m+n}{2} \cdot \sin \frac{m-n}{2} \\
\cos m + \cos n = 2 \cos \frac{m+n}{2} \cdot \cos \frac{m-n}{2} \\
\cos n - \cos m = 2 \sin \frac{m+n}{2} \cdot \sin \frac{m-n}{2} \\
\tang m + \tang n = \frac{\sin (m+n)}{\cos m \cos n} \\
\tang m - \tang n = \frac{\sin (m-n)}{\cos m \cos n} \\
\cot m + \cot n = \frac{\sin (m+n)}{\sin m \sin n} \\
\cot n - \cot m = \frac{\sin (m-n)}{\sin m \sin n}
\end{array}\right.$$

4.
$$\left\{\begin{array}{l}
\sin m^2 - \sin n^2 = \sin (m+n) \cdot \sin (m-n) \\
\cos m^2 - \sin n^2 = \cos (m+n) \cdot \cos (m-n) \\
\tang m^2 - \tang n^2 = \frac{\sin (m+n) \cdot \sin (m-n)}{\cos m^2 \cdot \cos n^2} \\
\cot n^2 - \cot m^2 = \frac{\sin (m+n) \cdot \sin (m-n)}{\sin m^2 \cdot \sin n^2}
\end{array}\right.$$

5.
$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\sin m + \sin n}{\sin m - \sin n} = \frac{\tang \frac{1}{2} (m+n)}{\tang \frac{1}{2} (m-n)} \\
\frac{\sin m + \sin n}{\cos m + \cos n} = \tang \frac{1}{2} (m+n) \\
\frac{\sin m + \sin n}{\cot n - \cos m} = \cot \frac{1}{2} (m-n) \\
\frac{\sin m - \sin n}{\cos m + \cos n} = \tang \frac{1}{2} (m-n) \\
\frac{\sin m - \sin n}{\cos n - \cos m} = \cot \frac{1}{2} (m+n) \\
\frac{\cos m + \cos n}{\cos n - \cos m} = \frac{\cot \frac{1}{2} (m+n)}{\tang \frac{1}{2} (m+n)} = \frac{\sec m + \sec n}{\sec m - \sec n}
\end{array}\right.$$

6.
$$\begin{cases} \sin 2m = 2 \sin m \cos m \\ \cos 2m = \cos m^2 - \sin m^2 \\ \tang 2m = \dfrac{2 \tang m}{1 - \tang m^2} \\ \cot 2m = \frac{1}{2} \cot m - \frac{1}{2} \tang m \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} \sin \frac{1}{2} m = \sqrt{\dfrac{(1 - \cos m)}{2}} \\ \cos \frac{1}{2} m = \sqrt{\dfrac{(1 + \cos m)}{2}} \\ \tang \frac{1}{2} m = \dfrac{\sin m}{1 + \cos m} \\ \cot \frac{1}{2} m = \dfrac{\sin m}{1 - \cos m} \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 1) \sin m^2 + \cos m^2 = 1, \sin m^2 = \dfrac{\tang m^2}{1 + \tang m^2} \\ 2) \cos m^2 = \dfrac{1}{1 + \tang m^2} \\ 3) \cos m^4 - \sin m^4 = \cos m^2 - \sin m^2 = \cos 2m \\ 4) \sin m^2 . \sin n^2 + \cos m^2 \cos n^2 + \sin m^2 . \cos n^2 \\ \quad + \sin n^2 . \cos m^2 = 1. \end{cases}$$

Die Formeln der erſten Tafel (122) werden ſo bewieſen:

Wenn man den Durchmeſſer nach der Hypotheſe durch 1 vorſtellt, ſo hat jeder Peripheriewinkel nach (121) die Sehne, auf der er ſteht, zum Sinus, alſo $\overline{BD} = \sin m$, $\overline{CD} = \sin n$, wie in der Tafel; noch mehr, da $E = \pi$, ſo iſt $A\hat{B}C$ das Complement von $n$, alſo auch $\overline{AC} = \cos m$, $\overline{AB} = \cos n$.

Aus demſelben Grunde, da $B\hat{A}C = m + n$, hat man $\overline{BC} = \sin (m + n)$, wie die Tafel anzeigt.

Der Winkel $ABD$ beſteht aus $ABC = \pi - m$

(weil $ABE$ ein rechtwinklichtes Dreyeck iſt), und $CBD = n$ (weil $GBD$, als Peripheriewinkel, mit $n$ auf einem Bogen ſteht) iſt alſo $\pi - m + n = \pi - (m - n)$, oder das Complement von $m - n$, alſo $\overline{AD} = cof\,(m-n)$, wie man es in der Tafel ſieht.

Wir wollen $\overline{AF}$, bis $G$ verlängert, an den Umkreis führen, und $BG$ ziehen, weil man nach der Conſtruktion $\overline{FE} = \overline{EC}$ hat, ſo wird man auch $G\hat{A}D = D\hat{A}C = n$ haben, alſo $B\hat{A}G = m - n$, alſo $\overline{BG} = ſin\,(m-n)$.

Nun ſieht man leicht, daſs das Dreyeck $BGF$ gleichſchenklicht iſt, denn der Winkel $B\hat{F}G$, oder $A\hat{F}C$, iſt nach der Conſtruktion $= A\hat{C}B$, der auf demſelben Bogen mit $B\hat{G}A$ ſteht; alſo iſt $B\hat{F}G = B\hat{G}A$ und $\overline{EF} = \overline{BG}$, alſo $\overline{BF} = ſin\,(m-n)$. Und durch ähnliche Betrachtungen findet man $\overline{AH} = cof\,(m+n)$.

Die Summe der beyden Segmente $\overline{BE}$, $\overline{CE}$ iſt $\overline{TC} = ſin\,(m+n)$, und ihr Unterſchied iſt $\overline{BF}$ oder $ſin\,(m-n)$, alſo iſt das gröſste

$\overline{BE} = \frac{1}{2}\,ſin\,(m+n) + \frac{1}{2}\,ſin\,(m-n)$, und das kleinſte

$\overline{CE} = \frac{1}{2}\,ſin\,(m+n) - \frac{1}{2}\,ſin\,(m-n)$, ſo wie es in der Tafel ſteht, und durch ähnliche Betrachtungen ſieht man, daſs

$\overline{AE} = \frac{1}{2}\,cof\,(m-n) + \frac{1}{2}\,cof\,(m+n)$ und

$\overline{DE} = \frac{1}{2}\,cof\,(m-n) - \frac{1}{2}\,cof\,(m+n)$.

Von einer andern Seite giebt das Dreyeck $ABE$

$\overline{AB}$ oder $cof\,n : \overline{BE} = 1 : ſin\,m$, alſo $\overline{BE} = ſin\,m\;cof\,n$.

Eben so geben die Dreyecke $ACE$, $BDE$, $DCE$ $\overline{CE} = \sin n \cos m$, $\overline{AE} = \cos m \cos n$, $\overline{DE} = \sin m \sin n$.

Addirt man die erste und zweyte der letzten Gleichungen, so hat man $\overline{BE} + \overline{CE}$, oder einen neuen Werth von $\overline{EC} = \sin m \cos n + \sin n \cos m$, wie in der Tafel. Subtrahirt man im Gegentheil $\overline{CE}$ von $\overline{BE}$, so hat man $\overline{BF} = \sin m \cos n - \sin n \cos m$.

Addirt und subtrahirt man nach einander $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$, so erhält man die zweyten Werthe von $\overline{AD}$, $\overline{AH}$, wie sie in der Tafel stehen. So werden alle Formeln dieser Tafel bewiesen.

124. Bey der zweyten Tafel (123) beweiset man die beyden ersten Formeln, indem man die doppelten Werthe der fünften, sechsten, siebenten und achten Formel der ersten Tafel gleich setzet, und diese beyden Formeln sind genug, um alle andern zu beweisen. Da sich das in den gewöhnlichen Abhandlungen der Trigonometrie findet, so verweise ich darauf um so mehr, da mein Zweck nicht ist, ein vollständiges Werk über diesen Gegenstand zu schreiben, sondern blos die Aufgabe unter einen neuen Gesichtspunkt zu bringen.

Doch will ich mich noch dieser Figur bedienen, um, ohne eine andere zu Hülfe zu nehmen, den Satz $\sin m^2 + \cos m^2 = 1$ zu beweisen. In der That, da $A\hat{E}C$ ein rechter Winkel ist, so macht die Summe der beyden Bogen $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$, deren Hälfte ihm zum Maasse dient, zwey Rechte; also ist die Sehne der Summe dieser beyden Bogen ein Durchmesser; also machen die beyden Sehnen einen rechten

Winkel, alſo iſt die Summe ihrer Quadrate gleich dem Quadrate des Diameters, welches nach der Hypotheſe 1 iſt, alſo $\mathit{ſin}\ m^2 + \mathit{coſ}\ m^2 = 1$. Wegen des rechtwinklichten Dreyecks $AEC$, hat man $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2$ und $\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{DE}^2$; addirt man dieſe Gleichungen, ſo hat man, weil $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 1$, wie wir eben ſahen, auch $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = 1$.

125. Die Betrachtungen ſind auf die Hypotheſe gegründet, daſs $m$, $n$ ſo wie ihre Summe $m + n$ kleiner als $\pi$ ſeyen. Jetzt iſt es leicht, die Formeln auf alle mögliche Winkel zu erſtrecken. Man braucht nur (53) die darin befindlichen Quantitäten als bloſse Werthe der Correlation anzuſehen, dieſe Werthe der Correlation für irgend einen andern Zuſtand des Syſtems zu ſuchen, und ſie in die Formeln zu ſetzen.

Wir wollen z. B. annehmen, daſs $\overline{BC}$ ſich, mit ſich ſelbſt parallel, bewege, indem ſie ſich dem Punkte $A$ bis über den Mittelpunkt des Cirkels nähert, ſo wird der Winkel $BAC$ oder $m + n$ ſtumpf, aber weder $m$, noch $n$ ſind durch o oder durch $\infty$ gegangen; alſo können auch ihre Zeichen der Correlation ſich nicht in den gefundenen Formeln ändern, alſo bleiben die zweyten Glieder dieſer Formeln, aber bey den erſten wird $\overline{AH}$ negativ, weil $\mathit{coſ}\ (m + n)$ negativ iſt, wenn $m + n > \pi$.

Jetzt wollen wir uns vorſtellen, daſs $\overline{BC}$ ſich, mit ſich ſelbſt parallel, nach der entgegengeſetzten Richtung bewege, d. h. indem ſie ſich vom Punkte $A$ entfernt, und daſs nachher $\overline{AD}$ ſich auch, mit ſich ſelbſt parallel bewege, indem ſie ſich vom Mittelpunkte entfernt, bis $E$, der Durchſchnittspunkt dieſer Linie,

Linie, mit $\overline{BC}$ auſserhalb des Cirkels fällt (*Fig.* 43. *), dann wird $\hat{n}$ oder $C\hat{A}D$ ſtumpf geworden ſeyn.

In der That iſt dieſer Winkel durch o gegangen, in dem Augenblicke, wo $E$ ſich mit dem Umkreiſe befand, und folglich mit $C$ und $D$ zuſammenfiel. Noch mehr im Urſyſtem hatte man $C\hat{A}E = C\hat{A}B - B\hat{A}E$, dagegen im neuen Syſtem $C\hat{A}E = B\hat{A}E - C\hat{A}B$. Der Winkel $m$ bleibt direkt, weil er weder durch o, noch durch $\infty$ geht.

Um alſo zu wiſſen, was auf dieſen Fall die Formeln werden, braucht man nur im zweyten Gliede jeder das Zeichen von $n$ zu verändern, und man wird den Werth der Correlation des erſten Gliedes finden; ſo z. B. wird man ſehen, daſs $\overline{CD}$ invers wird, weil ihr Werth $fin - n$ oder $-fin\, n$ wird (116), und eben das iſt der Fall bey $\overline{CE}$, $DE$.

Man kann auch unmittelbar an jeder der Quantitäten, die in dieſes erſte Glied kommen, ſehen, welche invers werden, wenn man die Figur entwirft, die dieſer zweyten Hypotheſe entſpricht, d. h. dem Falle, wo $n$ invers wird. Wenn man Schritt vor Schritt der Conſtruktion der vorigen Figur folgt, indem man $n$ invers macht, d. h. indem man annimmt, daſs dieſer Winkel erſt unmerklich bis Null abnimmt, oder daſs der Punkt $C$ ſich dem Punkte $D$ unmerklich nähere, bis er in ihn fällt, dann darüber hinausgehe, und ſich zwiſchen $B$ und $D$ ſtelle, ſo erhält man die Figur, welche durch Vergleichung mit der Urſigur zeigt, welche Quantitäten invers geworden ſind. So ſieht man, wie vorhin, daſs $\overline{DE}$ es geworden ſeyn wird, weil man im neuen Syſtem

$\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD}$ hat, da man im Urſyſtem $\overline{DE} = AD - \overline{AE}$ hatte. Eben ſo iſt $\overline{CE}$ invers, weil man im erſten Syſtem $\overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE}$ hatte, dagegen im zweyten $\overline{CE} = \overline{BE} - \overline{BC}$ iſt.

Auch $\overline{CD}$ iſt invers geworden (116), weil es der Sinus des Winkels $CAD$ iſt, von dem wir eben erfahren haben, daſs er invers geworden ſey. Von den Quantitäten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{AE}$ iſt keine durch o oder durch $\infty$ gegangen, ſie ſind alſo direkt geblieben. Alſo um auf den neuen Fall die im Urſyſtem gefundenen Formeln anzuwenden, braucht man nur darin das Zeichen der Quantitäten, $n$, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$ zu verändern, oder folgende Correlation mit dem Urſyſtem aufzuſtellen:

Urſyſtem $+m, +n, +\overline{AB}, +\overline{AC}, +\overline{BD}, +\overline{CD},$

Umgeformtes Syſtem $+n, -n, +\overline{AB}, +\overline{AC}, +\overline{BD}, -\overline{CD},$

$+\overline{BC}, +\overline{AD}, +BE, +\overline{CE}, +\overline{AE}, +\overline{DE}.$

$+\overline{BC}, +\overline{AD}, +\overline{BE}, -\overline{CE}, +\overline{AE}, -\overline{DE}.$

Alſo um die Formeln der Urtafel anwendbar auf das neue Syſtem zu machen, muſs man die, durch dieſe Correlation angezeigten, Veränderungen der Zeichen darin vornehmen. Eben ſo wäre es bey jeder andern Umformung.

Die Urfigur ſelbſt, auf welche die Betrachtung gegründet iſt, giebt acht mit dem erſten correlative Syſteme, das mit einbegriffen, weil jeder der vier Winkel, $A$, $B$, $C$, $D$, zuerſt in der Ordnung auf zwey verſchiedene Arten geſetzt werden kann, aber dieſe Formeln kommen auf folgende vier zurück:

| | |
|---|---|
| 1ſtes Syſtem . . . . . | $ABCDE$ |
| 2tes Syſtem . . . . . | $ACBDE$ |
| 3tes Syſtem . . . . . | $BDACE$ |
| 4tes Syſtem . . . . . | $BADCE$. |

Um z. B. auf das vierte die Formel

$$\sin(m+n) = \sin m.\ \cos n + \sin n.\ \cos m$$

anzuwenden, die dem erſten gehört, muſs man die Correlation der abſoluten Werthe und der Zeichen der dahin gehörigen Quantitäten, $m$, $n$, $(m+n)$ mit denen, die ſie erſetzen ſollen, aufſtellen:

| | |
|---|---|
| Urſyſtem | $+m, \quad +n, \quad +(m+n)$. |
| Umgeformtes Syſtem | $+(\pi-m), \quad +n, \quad +\pi-(m-n)$. |

Im erſten Syſteme hat man $m = B\hat{A}E$. Nun ſieht man aus der Correlation der Conſtruktion, daſs für das vierte Syſtem der Winkel, welcher $B\hat{A}E$ entſpricht, $A\hat{B}E$ iſt, oder $\pi-m$. Eben ſo ſehe ich, daſs der $n$ oder $C\hat{A}D$ entſprechende Winkel für das vierte Syſtem $D\hat{B}C$ oder $n$ iſt; und daſs endlich der Winkel, welcher $B\hat{A}C$ oder $m+n$ entſpricht, $A\hat{B}D$ oder $\pi-m+n$, oder $\pi-(m-n)$ iſt.

Das iſt die Correlation der abſoluten Werthe, die der Zeichen iſt direkt, weil das erſte Syſtem durch eine allmähliche Umformung offenbar dem zweyten ganz gleich werden kann, ohne daſs einer der Winkel $m$, $n$, $m+n$ durch o oder durch $\infty$ gehe. Alſo iſt die Correlation ſo, wie wir ſie vorher dargeſtellt haben, alſo wird die Formel, die wir auf das vierte Syſtem anwenden wollen,

$$\sin(\pi-(m-n)) = \sin(\pi-m).\cos n + \sin n.\cos(\pi-m) \text{ oder}$$
$$\cos(m-n) = \cos m.\cos n + \sin n.\sin m,$$

welches die achte Formel der erſten Tafel iſt.

126. Wir haben geſagt (124), daſs man aus den vier Grundgleichungen, die vorher gefunden worden (erſte Tafel, 5. 6. 7. 8.), alle die der zweyten Tafel ziehen kann. Noch mehr, man muſs bemerken, daſs dieſe vier Gleichungen alle von einer einzigen unter ihnen abgeleitet werden können, z. B. von der erſten, und daſs ſie, eigentlich betrachtet, nur dieſelbe Gleichung ſind, auf verſchiedene Arten ausgedrückt. Gleich die zweyte (in der zweyten Tafel) iſt nichts anders, als die erſte, in der $n$ negativ wird. Jede der zwey erſten Formeln müſſen bey jedem Werthe von $m$ und $n$ ſtatt haben, z. B. wenn man $\pi \pm m$ an die Stelle von $m$ ſetzt, ohne etwas an $n$ zu verändern. Macht man nach der Reihe dieſe Subſtitutionen, d. h. ſetzt man nach einander für $m$, $\pi + m$ und $\pi - m$, ſo entſtehen die zwey letzten Formeln daraus. So ſchlieſst die erſte alle andern in ſich, und umgekehrt; man kann alſo jede dieſer vier Formeln als einen allgemeinen Ausdruck der Verhältniſſe anſehen, die zwiſchen Sinus und Coſinus zweyer Winkel, Sinus und Coſinus ihrer Summe, und Sinus und Coſinus ihres Unterſchiedes beſtehen.

127. Wenn man in den vier Grundformeln (5. 6. 7. 8. der erſten Tafel) anfangs $n = 0$ annimmt, dann nach der Reihe $m = 0$, $m = \pi$, $m = 2\pi$, $m = 3\pi$, $m = 4\pi$, ſo erhält man die Formeln der Tafel (117). Macht man noch $n = 0$, und nimmt noch die Reihe $m = a$, $m = \pi \pm a$, $m = 2\pi \pm a$, ſo findet man

die der Tafel (116), wie es auch ſeyn muſs; weil dieſe erſten Tafeln und die letzte (123) auf daſſelbe Urſyſtem gegründet ſind, d. h. nach derſelben Hypotheſe, daſs die in dieſe Tafel aufgenommenen Winkel alle kleiner als der rechte Winkel ſind.

128. Die Aufgabe, die wir aufgelöſt haben, giebt nicht allein die vornehmſten Verhältniſſe der Lineoangulär-Quantitäten zweyer gegebenen Winkel, ſondern ſie ſchlieſst auch die Auflöſung der allgemeinen Aufgabe der Trigonometrie ein, nämlich der:

Wenn von den ſechs Dingen, die bey einem Dreyeck zu betrachten ſind, drey gegeben ſind (nur nicht die drey Winkel), alle übrigen zu finden.

Denn giebt man ein Dreyeck *ABC* aufzulöſen, ſo braucht man nur, um es in einen Cirkel zu beſchreiben, aus dem Winkel *A* einen Perpendikel auf die gegenüberſtehende Seite *BC* zu fällen und die Conſtruktion ſo zu vollenden, wie ſie (*Fig.* 43.) iſt. Dann kann man die Formeln der Tafel darauf anwenden, die die Verhältniſſe aller Theile dieſer Figur ausdrücken, unter denen ſich auch die zu betrachtenden ſechs Dinge finden. Ich kann mich hier nicht weiter hierüber verbreiten, da ich überdieſs im folgenden Abſchnitt darauf zurückkomme. Nur auf einige beſondere Folgerungen will ich mich beſchränken, die von ſelbſt aus dem Vorhergehenden entſpringen.

129. Die Figur 43 iſt, wie man ſieht, ein im Cirkel beſchriebenes Viereck mit rechtwinklichten Diagonalen. Ich bemerke gleich anfangs, daſs $\overline{AFG}$ $\overline{BD}$ perpendikulär in *I* ſchneidet, denn im Dreyeck

$IAD$ ist $I\hat{A}D$ nach der Hypothese gleich $D\hat{A}C$ oder $n$, und $I\hat{D}A = B\hat{C}A$ oder $\pi - n$; also macht die Summe dieser beyden Winkel $\pi$ aus; also ist auch $AID = \pi$, d. h. $\overline{AI}$ ist perpendikulär auf $BD$; also umgekehrt, wenn man vom Punkte $A$ den Perpendikel $\overline{AI}$ auf $BD$ fällt, geht es durch $F$. Aus eben dem Grunde, wenn man vom Punkte $D$ einen Perpendikel $\overline{DK}$ auf $\overline{AB}$ fällt, geht es auch durch den Punkt $F$. Also schneiden sich im Dreyecke $ABD$ die drey Perpendikel $\overline{AI}$, $\overline{BE}$, $\overline{DK}$, die aus den drey Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten gezogen werden, alle im Punkte $F$.

Man konnte eben so beweisen, dass im Dreyecke $ABC$ die drey Perpendikel, aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten gezogen, sich alle im Punkte $H$ schnitten, und da die Winkel $m$, $n$ willkührlich genommen sind, so gehört diese Eigenschaft jedem Dreyecke, d. h. in jedem Dreyecke schneiden die drey Perpendikel, aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten gezogen, sich in einem Punkte.

Weil vermöge der Construktion $G\hat{A}D = C\hat{A}D$, so ist auch $\overset{\frown}{GD} = \overset{\frown}{CD}$. Also überhaupt, wenn man aus einem willkührlich angenommenen Punkte des Umkreises $D$ zwey Chorden $\overline{DB}$, $\overline{DA}$ zieht, und von den Enden $A$, $B$ die Perpendikel $\overline{AG}$, $\overline{BC}$ darauf fällt, bis an den Umkreis verlängert, so sind die Bogen $\overset{\frown}{DG}$, $\overset{\frown}{DC}$, die zwischen dem ersten Punkte und dem neuen Durchschnittspunkte begriffen sind, gleich. Daher folgt z. B., dass, wenn man die Sehne $\overline{CG}$ zieht, sie perpendikular vom Diameter, den man aus

dem Punkte $D$ zöge, durchſchnitten würde, und daſs umgekehrt der Perpendikel aus $D$ auf $CG$ durch das Centrum gehen würde.

136. Ich habe bewieſen, daſs die Perpendikel aus den drey Winkeln $A$, $B$, $C$, auf die gegenüberſtehenden Seiten, ſich alle in einem Punkte durchſchneiden müſſen, hier in $D$ (*Fig.* 44.). Aber jeder der Scheitel $A$, $B$, $C$ iſt in dieſer Rückſicht in demſelben Fall wie der Punkt $D$, d. h. eben ſo wie der Punkt $D$ der iſt, wo ſich die Perpendikel aus den Winkeln des Dreyecks $ABC$ auf die gegenüberſtehenden Seiten durchſchneiden, eben ſo iſt der Punkt $A$ z. B., wie man leicht ſieht, der, wo ſich die Perpendikel aus den drey Winkeln des Dreyecks $ABC$ auf die ihnen gegenüberſtehenden Seiten durchſchneiden. Eben dieſs iſt bey den andern. So bilden drey beliebige Punkte von den vier Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ immer ein Dreyeck, wo die drey Perpendikel aus den Winkeln dieſes Dreyecks auf die gegenüberſtehenden Seiten ſich alle im vierten Punkte durchſchneiden. Die Figur iſt alſo ein Syſtem von vier Punkten, wovon zwey und zwey durch Linien verbunden ſind, und zwar ſo, daſs jede Linie, die durch zwey dieſer Punkte geht, die Linie, welche durch die zwey andern geht, perpendikulär ſchneidet.

Noch mehr: dieſe Figur hat die Eigenſchaft, daſs, wenn man durch je drey oder vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ (zum Beyſpiel durch $A$, $B$, $C$) einen Cirkel beſchreibt und den Perpendikel bis an den Umkreis in $A'$, $B'$, $C'$ verlängert, daraus drey im Cirkel beſchriebene Vierecke mit rechtwinklichten

Diagonalen entſtehen, ſo wie die, die wir in der Aufgabe (122) unterſucht haben, nämlich $ABA'C$, $BCB'A$, $CAC'B$, in welchen man je zwey vollkommen ähnliche und gleiche Dreyecke hat, $BDC$ und $BA'C$, $ABD$ und $AC'B$, $ADC$ und $AB'C$.

Was ich eben von dem Cirkel geſagt habe, der durch die drey Punkte $A$, $B$, $C$ geht, paſst auch auf jeden andern, der durch drey beliebige Punkte von den vieren $A$, $B$, $C$, $D$ geht, wobey man noch bemerken muſs, daſs alle dieſe Cirkel denſelben Durchmeſſer haben, d. h. zum Beyſpiel der Cirkel, der um das Dreyeck $BDC$ beſchrieben wird, iſt gleich dem Cirkel $ABA'C$, weil das Dreyeck $BDC$ vollkommen gleich und ähnlich dem Dreyecke $BA'C$ iſt, welches ſelbſt in dem Cirkel $ABA'C$ beſchrieben iſt.

131. Wenn man aus dem Mittelpunkte $L$ (*Fig.* 43.) ſich einen Perpendikel auf $\overline{BC}$ gezogen vorſtellt, ſo ſieht man leicht, daſs, wenn der Durchmeſſer des Cirkels $= 1$ iſt, der Perpendikel $\frac{1}{2}\ cof\ (BAC)$ oder $\frac{1}{2}\ cof\ (m + n)$ ſeyn wird, aber die Tafel (122) giebt $\overline{AH} = cof\ (m + n)$, welches der doppelte iſt. Alſo: In jedem Dreyecke iſt der Perpendikel, aus dem Mittelpunkte des umſchriebenen Cirkels auf eine Seite gelaſſen, die Hälfte der Entfernung des Scheitels des entgegengeſetzten Winkels von dem Punkte, wo ſich die drey aus den Winkeln auf die gegenüberſtehenden Seiten gezogenen Perpendikel ſchneiden.

Daraus folgt, daſs, wenn man aus $p$, dem Mittelpunkt von $\overline{BC}$ (*Fig.* 45), eine Linie nach $A$ zöge,

ſie in *o* durch die Linie $\overline{LH}$ (*H* iſt der Durchſchnittspunkt der Perpendikel) auf zwey Drittel ihrer Länge, vom Punkte *A* an zu rechnen, geſchnitten würde. Denn die Dreyecke *AHo*, *pLo* ſind ähnlich, alſo da $\overline{Lp} = \frac{1}{2}\overline{AH}$, iſt auch $\overline{po} = \frac{1}{2}\overline{Ao}$. Nun ſieht man leicht, daſs *o* der Punkt iſt, wo ſich die drey Linien, die aus jedem Winkel auf die gegenüberſtehenden Seiten gezogen werden, ſchneiden. Alſo: In jedem Dreyecke liegt der Durchſchnittspunkt der drey Linien, aus jedem Winkel auf die Mitte der gegenüberſtehenden Seite, der Durchſchnittspunkt der drey Perpendikel aus eben dieſen Winkeln, auf die gegenüberſtehenden Seiten gezogen, und der Mittelpunkt des umſchriebenen Cirkels in einer geraden Linie.

132. Bis jetzt haben wir den Durchmeſſer des Cirkels (*Fig.* 43.) durch 1 bezeichnet, aber wollen wir die wirklichen Werthe der Figuren, die nach dieſem Parameter beſtimmt werden, haben, ſo muſs man damit anfangen, die Gleichungen gleichartig zu machen, indem man für die Einheit, wo ſie den Durchmeſſer vorſtellt, den wirklichen Werth dieſes Durchmeſſers ſetzt. Wir wollen den Radius $= R$ annehmen, ſo wird der Durchmeſſer $= 2R$ ſeyn. Dann muſs man, um die (122) gefundenen Gleichungen homogen zu machen, ſtatt der Quantitäten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ u. ſ. w. $\frac{\overline{AB}}{2R}$ $\frac{\overline{AC}}{2R}$ $\frac{\overline{BD}}{2R}$ u. ſ. w. ſetzen, die ſo abſtrakte Zahlen werden, wie jeder der zweyten Ausdrücke dieſer Gleichungen. Dieſe ſo umge-

formten Formeln geben verſchiedene neue Folgerungen. Z. B. wir haben (124) $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 1$, dieſe Gleichung wird $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4R^2$.

Aus demſelben Grunde hat man $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4R^2$, alſo $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = 8R^2$,

d. h. In jedem Viereck, das in einem Cirkel beſchrieben iſt und rechtwinklichte Diagonalen hat, iſt die Summe der Quadrate der vier Seiten dem doppelten Quadrate des Durchmeſſers gleich.

133. Wir fanden ebenfalls (124)

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = 1.$$

Dieſe Einheit giebt hier $4R^2$, alſo:

In jedem Vierecke, das in einem Cirkel beſchrieben iſt und rechtwinklichte Diagonalen hat, iſt die Summe der Quadrate der vier Segmente der Diagonalen gleich dem Quadrate des Diameters.

134. Weil $\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{CE}$, ſo hat man

$$\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + 2\,\overline{BE} \cdot \overline{CE}$$

und eben ſo $\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 + 2\,\overline{AE} \cdot \overline{DE}$. Addirt man die beyden Gleichungen und bemerkt, daſs nach dem vorigen Satz

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = 4R^2$$

und $\overline{BE} \cdot \overline{CE} = \overline{AE} \cdot \overline{DE}$ wegen der Eigenſchaften des Cirkels, ſo erhält man

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 4R^2 + 4\,\overline{AE} \cdot \overline{DE}.$$

Dieſs feſtgeſetzt, ſo wollen wir die Entfernung des Punktes $E$ vom Mittelpunkte des Cirkels $r$ nen-

nen, oder welches einerley ist, den Halbmesser des concentrischen Kreises, der durch den Punkt $E$ geht. Die Segmente, welche $E$ auf dem Durchmesser, der durch diesen Punkt geht, macht, werden $R+r$ und $R-r$ seyn, folglich ihr Produkt $R^2-r^2$. Also hat man vermöge der Eigenschaften des Cirkels

$$\overline{AE} \cdot DE = R^2 - r^2.$$

Also wird die vorige Gleichung

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 8R^2 - 4r^2,$$

d. h. Wenn man aus einem beliebigen Punkte in der Fläche des Cirkels zwey beliebige Sehnen zieht, die sich senkrecht durchschneiden, so wird die Summe der Quadrate dieser beyden Sehnen gleich dem doppelten Quadrate des Durchmessers seyn, weniger viermal des Quadrats der Entfernung des Durchschnittspunktes dieser beyden Sehnen vom Mittelpunkt des Cirkels.

Man muss bemerken (47), dass dieselben Eigenschaften statt haben, der Punkt $E$ mag innerhalb oder ausserhalb der Fläche des Cirkels liegen. Dieselben Eigenschaften erstrecken sich auch auf die Kugel, mit folgenden Modifikationen.

135. Wir wollen annehmen, dass eine Kugel durch drey unter einander perpendikuläre Ebenen geschnitten sey, $R$ sey ihr Halbmesser, $r$ die Entfernung ihres Centrums von dem Punkte, wo sich die drey Axen kreuzen, welche aus den Durchschnitten dieser Ebenen entstehen, so ist

1) die Summe der Quadrate der 3 Sehnen oder der Theil der eben angeführten Axen, welcher von der Kugelfläche abgeschnitten wird, $= 12R^2 - 8r^2$.

2) Die Summe der Produkte, die entstehen, wenn man die 2 Segmente jeder Sehne mit einander multiplicirt, $= 3R^2 - 3r^2$.

3) Die Summe der Quadrate der 6 Segmente, die 2 und 2 auf diesen Sehnen gebildet werden, $= 6R^2 - 2r^2$.

4) Die Summe der Quadrate der 12 Linien, die 2 und 2 die Enden von jeder dieser Sehnen mit den Enden der beyden andern verbinden, $= 24R^2 - 8r^2$.

5) Die Summe der Quadrate der 15 Linien, die 2 und 2 die 6 Enden der 3 Sehnen verbinden, $= 36R^2 - 16r^2$.

6) Die Summe der Quadrate der Halbmesser der 3 Cirkel, welche die Durchschnitte der Kugel mit 3 Ebenen bilden, $= 3R^2 - r^2$.

Jede dieser Quantitäten wird also immer dieselbe seyn, was auch die Richtung der Axen seyn mag, so lange der Halbmesser $R$ der Kugel und die Entfernung $r$ ihres Mittelpunkts vom Durchschnittspunkte dieser Axen dieselben bleiben, dieser Durchschnittspunkt mag innerhalb oder aufserhalb des Körpers der Kugel liegen, wenn sie nur wirklich durchschnitten, oder zum wenigsten von diesen drey Axen berührt ist, denn die Sätze haben nicht mehr statt, wenn eine oder zwey dieser Axen nicht die Kugel träfen.

Ich füge noch hinzu, weil die Flächen der Cirkel ſich wie die Quadrate der Durchmeſſer verhalten, ſo folgt aus dem ſechſten Satze dieſer neue:

Wenn man von einem gegebenen Punkte ich drey auf einander ſenkrechte Ebenen vorſtellt, die den Körper einer Kugel ſchneiden, ſo wird die Summe der Flächen der drey Cirkel, welche die Durchſchnitte bilden, immer dieſelbe ſeyn, welche Richtungen man auch dieſen Ebenen giebt; wenn ſie nur nicht aufhören alle drey die Kugel zu ſchneiden. Dieſe beſtändige Quantität iſt $\frac{3}{4}$ der gegebenen ſphäriſchen Oberfläche, weniger der ganzen ſphäriſchen Oberfläche, welche zum Durchmeſſer die Entfernung des Centrums der gegebenen Kugel vom Durchſchnittspunkte der drey Axen hätte.

136. Man kann aus dieſen Sätzen verſchiedene intereſſante Folgerungen ziehen. Z. B. wenn man annimmt, daſs der Punkt, wo ſich die drey Axen ſchneiden, auf der Oberfläche der Kugel ſey, ſo hat man $r = R$, und das Syſtem kommt auf eine Triangular-Pyramide zurück, deren drey Flächen auf einander ſenkrecht ſind. Die dritte Formel ſagt uns, daſs die Summe der Quadrate der drey Kanten, die von dem Scheitel ausgehen, wo ſich die drey Flächen vereinigen, immer gleich dem Quadrate des Durchmeſſers der Kugel iſt, wie auch die Richtungen dieſer Kanten ſeyn mögen. Alſo eben ſo, als, wenn man aus einem Punkte der Peripherie eines Cirkels zwey auf einander ſenkrechte Sehnen zieht, die Summe

der Quadrate dieſer Sehnen immer gleich dem Quadrate des Durchmeſſers iſt, eben ſo iſt bey der Kugel, wenn man, von einem Punkte auf ihrer Oberfläche genommen, in dieſe Kugel drey beliebige Sehnen zieht, die Summe der Quadrate dieſer drey Sehnen immer gleich dem Quadrate des Durchmeſſers dieſer Kugel.

Daher folgt auch, daſs, wenn man eine Triangularpyramide, die drey auf einander ſenkrechte Seitenflächen hat, in eine Kugel beſchreiben ſollte, man gleich den Durchmeſſer der Kugel haben würde.

137. Aus dem Mittelpunkte $L$ des umſchriebenen Kreiſes (*Fig.* 46.) ſeyen die Perpendikel $\overline{La}$, $\overline{Lb}$, $\overline{Lc}$ auf die Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ gelaſſen, und dann die Linien $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ gezogen; da die Punkte $a$, $b$, $c$ die Mittelpunkte der Seiten ſind, ſo werden die letztern Linien mit den jedesmaligen Seiten parallel ſeyn, und gleich ihren Hälften. Dieſs angenommen, kann das Viereck $aBcL$, welches zwey rechte Winkel in $a$ und $c$ hat, eben deswegen in einen Kreis beſchrieben werden. Alſo nach der Eigenſchaft der in einen Kreis beſchriebenen Vierecke iſt das Produkt ſeiner zwey Diagonalen gleich der Summe der Produkte der entgegengeſetzten Seiten. Die beyden andern Vierecke $bAcL$, $bCaL$ haben dieſelbe Eigenſchaft. Alſo hat man die drey Gleichungen

$$\overline{AL}.\overline{bc} = \overline{Ab}.\overline{cL} + \overline{Ac}.\overline{bL}$$
$$\overline{BL}.\overline{ca} = \overline{Bc}.\overline{aL} + \overline{Ba}.\overline{cL}$$
$$\overline{CL}.\overline{ab} = \overline{Ca}.\overline{bL} + \overline{Cb}.\overline{aL}.$$

Addirt man alle dieſe Gleichungen, indem man bemerkt, daſs $\overline{AL} = \overline{BL} = \overline{CL} = R$, und daſs

$\overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ab}$ die Hälfte des Umfangs ist, den ich $p$ nennen will, und dafs endlich $\overline{Ab} = \overline{Cb}$, $\overline{Ac} = \overline{Bc}$, $\overline{Ba} = \overline{Ca}$, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}p \,.\, R = \tfrac{1}{2}p\,(\overline{aL} + \overline{bL} + \overline{cL}) - \tfrac{1}{2}(\overline{aL} \,.\, \overline{BC} + \overline{bL} \,.\, \overline{AC} + \overline{cL} \,.\, \overline{AB}),$$

aber der letzte Ausdruck des zweyten Gliedes ist offenbar der Inhalt des Dreyecks $ABC$; nimmt man nun den Durchmesser des im Dreyecke beschriebenen Kreises $r$, so ist dieser Inhalt auch $= \tfrac{1}{2}pr$; setzt man diesen letzten Werth für den ersten, versetzt, und dividirt alles durch $\tfrac{1}{2}p$, so erhält man

$$R + r = \overline{aL} + \overline{bL} + \overline{cL}.$$

Also in jedem Dreyecke ist die Summe der drey Perpendikel aus dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises auf die Seiten, gleich der Summe des Halbmessers des umschriebenen Kreises und des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises.

Wir haben angenommen, dafs der Mittelpunkt in die Fläche des Dreyecks selbst fiele; fällt er aufserhalb, so ist ein stumpfer Winkel da, und dann wird der Perpendikel, aus dem Mittelpunkte auf die diesem stumpfen Winkel entgegengesetzte Seite gesenkt, invers, und so sein Werth negativ.

Wir haben (131) gesehen, dafs $\overline{AH}$ (*Fig.* 43.) das Doppelte des Perpendikels ist, das man aus dem Mittelpunkte $L$ auf die dem Winkel $A$, aus welchem der Perpendikel $\overline{AH}$ gezogen ist, entgegengesetzte Seite zieht. Also ist die Summe der Entfernungen des Punktes $H$ von den Winkeln $A$, $B$, $C$ selbst das

Doppelte der Summe der drey Perpendikel, die aus dem Mittelpunkt auf die Seiten gezogen ſind. Nun haben wir oben geſehen, daſs dieſe letzte Summe $= R + r$ iſt, alſo:

In jedem ſpitzwinklichten Dreyecke iſt die Summe der Entfernungen des Punktes, wo ſich die drey Perpendikel aus den Winkeln auf die entgegengeſetzten Seiten ſchneiden, gleich der Summe des Durchmeſſers des eingeſchriebenen Kreiſes und des Durchmeſſers des umſchriebenen Kreiſes. Iſt einer von den Winkeln ſtumpf, ſo muſs man die Entfernung dieſes Winkels von dem Punkte, wo ſich die Perpendikel kreuzen, negativ nehmen.

Man hat offenbar (*Fig.* 46.) $\overline{La} = R \,.\, cof\, A$, $\overline{Lb} = R \,.\, cof\, B$, $\overline{Lc} = R \,.\, cof\, C$. Addirt man dieſe drey Gleichungen, und bemerkt, daſs $\overline{La} + \overline{Lb} + \overline{Lc} = R + r$, ſo erhält man

$$R + r = R \,.\, (cof\, A + cof\, B + cof\, C) \text{ oder}$$

$$\frac{r}{R} = cof\, A + cof\, B + cof\, C - 1, \text{ d. h.:}$$

In jedem Dreyeck verhält ſich der Halbmeſſer des eingeſchriebenen Kreiſes zum Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes, wie die Summe der Coſinus der drey Winkel, weniger den *Sinus totus*, zum *Sinus totus*.

138. Man könnte, indem man immer nur von den gegebenen Begriffen ausginge, die Theorie der

Lineo-

Lineo-angulär-Quantitäten auf einen allgemeineren Grundſatz zurückführen, der auf dem bekannten Satze beruht, daſs in jedem eingeſchriebenen Viereck das Produkt der beyden Diagonalen gleich der Summe der Produkte der entgegengeſetzten Seiten iſt.

Es ſey $ABCD$ (*Fig.* 47.) ein ſolches Viereck; wir wollen

$\widehat{AB} = 2a$, $\widehat{AC} = 2b$, $\widehat{DC} = 2c$ und folglich $\widehat{BD} = 2(2\pi - [a+b+c])$ annehmen.

Wir haben alſo (121) $\overline{AB} = \mathit{ſin}\ a$, $\overline{AC} = \mathit{ſin}\ b$, $\overline{DC} = \mathit{ſin}\ c$, $\overline{BD} = \mathit{ſin}\ (a+b+c)$, $\overline{BC} = \mathit{ſin}\ (a+b)$, $\overline{AD} = \mathit{ſin}\ (b+c)$.

Setzt man dieſe Werthe in die Gleichung

$$\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AC} \cdot \overline{BD},$$

ſo erhalten wir

$$\mathit{ſin}\ (a+b) \cdot \mathit{ſin}\ (b+c) = \mathit{ſin}\ a \cdot \mathit{ſin}\ c + \mathit{ſin}\ b \cdot \mathit{ſin}\ (a+b+c),$$

eine Formel, die für jeden Werth der Winkel $a$, $b$, $c$ iſt.

Wir wollen zum Beyſpiel $b + c = \pi$ nehmen, ſo hat man

$\mathit{ſin}\ (b+c) = 1$, $\mathit{ſin}\ c = \mathit{coſ}\ b$, $\mathit{ſin}\ (a+b+c) = \mathit{ſin}\ (\pi + a) = \mathit{coſ}\ a$; die Formel wird alſo

$$\mathit{ſin}\ (a+b) = \mathit{ſin}\ a \cdot \mathit{coſ}\ b + \mathit{ſin}\ b \cdot \mathit{coſ}\ a.$$

Nehmen wir $b = \pi$, ſo haben wir

$\mathit{ſin}\ b = 1$, $\mathit{ſin}\ (a+b) = \mathit{coſ}\ a$, $\mathit{ſin}\ (b+c) = \mathit{coſ}\ c$, $\mathit{ſin}\ (a+b+c) = \mathit{coſ}\ (a+c)$;

die Formel wird alſo

$$\mathit{coſ}\ (a+c) = \mathit{coſ}\ a \cdot \mathit{coſ}\ c - \mathit{ſin}\ a \cdot \mathit{ſin}\ c.$$

Nehmen wir $c = -a$, ſo haben wir

$\mathit{ſin}\ (a+b+c) = \mathit{ſin}\ b$, $\mathit{ſin}\ c = -\mathit{ſin}\ a$, $\mathit{ſin}\ (b+c) = \mathit{ſin}\ (b-a)$;

die Formel wird alſo

$$\sin(b+a) \cdot \sin(b-a) = \sin b^2 - \sin a^2.$$

Nehmen wir $c = \pi - a$, ſo haben wir

$$\sin c = \cos a, \sin(b+c) = \cos(a-b), \sin(a+b+c) = \cos b;$$

die Formel wird alſo

$$\sin(a+b) \cdot \cos(a-b) = \sin a \cdot \cos a + \sin b \cdot \cos b.$$

So ſchlieſst dieſer einzige Satz die ganze Theorie der Lineo - angulär - Quantitäten zweyer gegebenen Winkel ein (ſiehe 210 ff.).

## Achte Aufgabe.

**139. Durch allgemeine Formeln die Verhältniſſe auszudrücken, die zwiſchen Sinus und Coſinus einer beliebigen Zahl von Winkeln, Sinus und Coſinus ihrer Summe, und Sinus und Coſinus ihres Unterſchiedes beſtehen.**

In der (122) behandelten Aufgabe haben wir nur zwey Winkel $m$, $n$ betrachtet, und haben die Verhältniſſe geſucht, die zwiſchen Sinus und Coſinus dieſer Winkel, ſo wie zwiſchen Sinus und Coſinus ihrer Summe, und Sinus und Coſinus ihres Unterſchiedes beſtehen. Wir müſſen jetzt dieſe Formeln allgemein machen, indem wir ſie auf eine beliebige Folge von Winkeln $a$, $b$, $c$, $d$ ausdehnen.

Wir wollen erſt nur drey nehmen, dann hat man folgende beyden wechſelſeitigen Gleichungen zwiſchen den drey Winkeln $a$, $b$, $c$, d. h. wo dieſe Winkel alle drey dieſelbe Rolle ſpielen,

$$\sin a \cdot \sin (b-c) + \sin b \cdot \sin (c-a) + \sin c \cdot \sin (a-b) = 0 \quad (A)$$

$$\cos a \cdot \sin (b-c) + \cos b \cdot \sin (c-a) + \cos c \cdot \sin (a-b) = 0 \quad (B).$$

Wir haben nämlich (123)

$$\left.\begin{aligned} \sin (b-c) &= \sin b \cdot \cos c - \sin c \cdot \cos b \\ \sin (c-a) &= \sin c \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos c \\ \sin (a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \end{aligned}\right\} (C)$$

Multiplicirt man die erſte Gleichung durch $\sin a$, die zweyte durch $\sin b$, die dritte durch $\sin c$, und addirt ſie dann, ſo wird das zweyte Glied o, und das erſte die Gleichung $(A)$, welches die erſte von denen iſt, die bewieſen werden ſollten.

Multiplicirt man nachher die erſte von den Gleichungen $(C)$ durch $\cos a$, die zweyte durch $\cos b$, die dritte durch $\cos c$, und addirt ſie, ſo wird das zweyte Glied o, und das erſte die Gleichung $(B)$, welches der zweyte der zu beweiſenden iſt.

Dieſe letzte kann auch aus der erſten $(A)$ abgeleitet werden, denn dieſe muſs ſtatt haben, welche Werthe man auch für $a$, $b$, $c$ ſetzt, und wird alſo eben ſo wahr ſeyn, wenn man ſtatt dieſer Winkel ihre Complemente ſetzt, nämlich $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$; durch dieſe Subſtitution aber wird die Gleichung $(A)$, die Gleichung $(B)$.

In dieſen Formeln kann man willkührlich einen oder mehrere von den drey Winkeln $a$, $b$, $c$ negativ annehmen, was die Summen der Winkel, zwey und zwey genommen, ſtatt ihrer Unterſchiede giebt.

Dividirt man die erſte der Formeln $(A)$, $(B)$ durch $\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c$. und die zweyte durch

$cof\ a.\ cof\ b.\ cof\ c.$ so werden diese Formeln

$$\frac{fin\ (a-b)}{fin\ a\ .\ fin\ b} + \frac{fin\ (b-c)}{fin\ b\ .\ fin\ c} + \frac{fin\ (c-a)}{fin\ c\ .\ fin\ a} = 0 \quad (D)$$

$$\frac{fin\ (a-b)}{cof\ a\ .\ cof\ b} + \frac{fin\ (b-c)}{cof\ b\ .\ cof\ c} + \frac{fin\ (c-a)}{cof\ c\ .\ cof\ a} = 0 \quad (E)$$

Formeln, die auch wechselseitig zwischen $a$, $b$, $c$ sind.

Setzt man in den Formeln $(A)$, $(B)$ nach der Reihe $c = 0$, $c = \pi$, und setzt man auch nach einander $b$ positiv und negativ, so wird man die Grundformeln erhalten, welche die fünfte und sechste Formel der Tafel (122) für zwey Winkel geben.

Nimmt man $c = a + b$, so werden die Formeln $(A)$ und $(B)$

$$fin\ (a+b)\ .\ fin\ (a-b) = fin\ a^2 - fin\ b^2$$

$$cof\ (a+b)\ .\ fin\ (a-b) = fin\ a\ .\ cof\ a - fin\ b\ .\ cof\ b.$$

Setzt man in der Formel $(A)$ $c = \pi$, $b = -a$, so wird sie $fin\ 2a = 2\ fin\ a\ .\ cof\ a.$

Es sey $c = \pi$, $b = \frac{1}{2}a$, so wird die Formel $\frac{fin\ \frac{1}{2}a}{cof\ \frac{1}{2}a}$ oder $tang\ \frac{1}{2}a = \frac{fin\ a}{1 + cof\ a}$. Derselbe Fall tritt bey den andern ein.

140. Jetzt wollen wir vier Winkel, $a$, $b$, $c$, $d$, im System annehmen, dann wird man folgende beyde Formeln haben:

$$fin\ a\ .\ fin\ b\ .\ fin\ (c-d) + fin\ b\ .\ fin\ c\ .\ fin\ (d-a) + fin\ c\ .\ fin\ d\ .\ fin\ (a-b) + fin\ d\ .\ fin\ a\ .\ fin\ (b-c) = 0.$$

$$cof\ a\ .\ cof\ b\ .\ fin\ (c-d) + cof\ b\ .\ cof\ c\ .\ fin\ (d-a) + cof\ c\ .\ cof\ d\ .\ fin\ (a-b) + cof\ d\ .\ cof\ a\ .\ fin\ (b-c) = 0.$$

Dividirt man die erste durch $fin\ a.\ fin\ b.\ fin\ c.\ fin\ d.$

und die zweyte durch $cof.\ a.\ cof\ b.\ cof\ c.\ cof\ d$, ſo erhält man

$$\frac{fin\ (a-b)}{fin\ a\ .\ fin\ b}+\frac{fin\ (b-c)}{fin\ b\ .\ fin\ c}+\frac{cof\ (c-d)}{fin\ c\ .\ fin\ d}+\frac{fin(d-a)}{fin\ d\ .\ fin\ a}=0$$

$$\frac{fin\ (a-b)}{cof\ a\ .\ cof\ b}+\frac{fin\ (b-c)}{cof\ b\ .\ cof\ c}+\frac{fin\ (c-d)}{fin\ c\ .\ fin\ d}+\frac{fin\ (d-a)}{fin\ d\ .\ fin\ a}=0.$$

Betrachtet man die Analogie dieſer Formeln mit denen (139) für drey Winkel nur gefundenen, ſo kann man ſchlieſsen, daſs überhaupt für eine beliebige Zahl von Winkeln

$$\frac{fin\ (a-b)}{fin\ a\ .\ fin\ b}+\frac{fin\ (b-c)}{fin\ b\ .\ fin\ c}+\frac{fin\ (c-d)}{fin\ c\ .\ fin\ d}\ldots.+\frac{fin\ (p-a)}{fin\ p\ .\ fin\ a}=0\ (F)$$

$$\frac{fin\ (a-b)}{cof\ a\ .\ cof\ b}+\frac{fin\ (b-c)}{cof\ b\ .\ cof\ c}+\frac{fin\ (c-d)}{cof\ c\ .\ cof\ d}\ldots.+\frac{fin\ (p-a)}{cof\ p\ .\ cof\ a}=0\ (G).$$

In der That haben wir (123)

$$fin\ (a-b)=fin\ a\ .\ cof\ b-fin\ b\ .\ cof\ a$$
$$fin\ (b-c)=fin\ b\ .\ cof\ c-fin\ c\ .\ cof\ b$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$fin\ (p-a)=fin\ p\ .\ cof\ a-fin\ a\ .\ cof\ p.$$

Theilt man die erſte dieſer Gleichungen durch $fin\ a$, $fin\ b$, die zweyte durch $fin\ b$, $fin\ c$ u. ſ. w. und addirt dann alle dieſe Gleichungen, ſo wird das zweyte Glied 0, das erſte die Gleichung in $(F)$.

Die zweyte Gleichung $(G)$ beweiſt man auch auf gedoppelte Art (139).

In dieſen Formeln kann man willkührlich einen oder mehrere Winkel negativ annehmen, wodurch in

der Rechnung die Summen dieſer Winkel, zwey und zwey genommen, ſtatt ihrer Unterſchiede entſtehen werden.

Dieſelben Formeln können auf unendlich viele Arten verändert werden, denn ſie müſſen ſtatt haben, welche Winkel man auch für $a$, $b$, $c$ ſetzen will. So kann man ſtatt des Syſtems der Winkel $a$, $b$, $c$, das Syſtem der Winkel $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+d)$ u. ſ. w. ſetzen, oder $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-d)$ u. ſ. w. oder $(a+b+c)$, $(b+c+d)$ u. ſ. w., oder $(a+b-c)$, $(b+c-d)$ u. ſ. w. oder die Complemente dieſer Winkel, oder dieſe Winkel negativ genommen u. ſ. w.

141. Dieſelbe Methode kann dienen, um mehr andere Formeln derſelben Art zu finden, die eben ſo einfach und wechſelſeitig zwiſchen allen Winkeln ſind. Man hat z. B. zwiſchen beliebigen Winkeln $a, b, c \ldots p$ folgende zwey allgemeine Formeln:

$$\sin(a+b)\cdot\sin(a-b) + \sin(b+c)\cdot\sin(b-c) \ldots\ldots + \sin(p+a)\cdot\sin(p-a) = o \quad (H)$$

$$\cos(a+b)\cdot\sin(a-b) + \cos(b+c)\cdot\sin(b-c) \ldots\ldots + \cos(p+a)\cdot\sin(p-a) = o \quad (K)$$

Denn wir haben vorher (123, 138) gefunden

$$\sin(a+b)\cdot\sin(a-b) = \sin a^2 - \sin b^2$$
$$\sin(b+c)\cdot\sin(b-c) = \sin b^2 - \sin c^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin(p+a)\cdot\sin(p-a) = \sin p^2 - \sin a^2.$$

Addirt man alle dieſe Gleichungen, ſo wird das zweyte Glied o, und das erſte die Formel $(H)$, welches die erſte zu beweiſende iſt.

Eben so fanden wir (123)

$$\cos(a+b) \,.\, \sin(a-b) = \sin a \,.\, \cos a - \sin b \,.\, \cos b$$
$$\cos(b+c) \,.\, \sin(b-c) = \sin b \,.\, \cos b - \sin c \,.\, \cos c$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cos(p+a) \,.\, \sin(p-a) = \sin p \,.\, \cos p - \sin a \,.\, \cos a$$

Addirt man diese Gleichungen, so wird das zweyte Glied o, und das erste die Formel ($K$), welches die zweyte der zu beweisenden ist.

142. Eben so geben die vierten Formeln der Tafel (123)

$$\frac{\sin(a+b) \,.\, \sin(a-b)}{\cos a^2 \,.\, \cos b^2} = \tang a^2 - \tang b^2$$
$$\frac{\sin(b+c) \,.\, \sin(b-c)}{\cos b^2 \,.\, \cos c^2} = \tang b^2 - \tang c^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\sin(p+a) \,.\, \sin(p-a)}{\cos p^2 \,.\, \cos a^2} = \tang p^2 - \tang a^2$$

Addirt man diese Gleichungen, so wird das zweyte Glied o, und das erste giebt die Formel

$$\frac{\sin(a+b) \,.\, \sin(a-b)}{\cos a^2 \,.\, \cos b^2} + \frac{\sin(b+c) \,.\, \sin(b-c)}{\cos b^2 \,.\, \cos c^2} \cdots\cdots$$
$$+ \frac{\sin(p+a) \,.\, \sin(p-a)}{\cos p^2 \,.\, \cos a^2} = 0$$

143. Eben so geben die ersten Formeln der Tafel (123)

$$\tang(a-b) = \frac{\tang a - \tang b}{1 + \tang a \,.\, \tang b}, \text{ oder}$$
$$\tang(a-b)\,(1 + \tang a \,.\, \tang b) = \tang a - \tang b$$
$$\tang(b-c)\,(1 + \tang b \,.\, \tang c) = \tang b - \tang c$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tang(p-a)\,(1 + \tang b \,.\, \tang c) = \tang p - \tang a.$$

Addirt man dieſe Gleichungen, ſo wird das zweyte Glied o, und das erſte giebt folgende Formel:

$$tang\,(a-b).(1+tang\,a\,,\,tang\,b)+tang\,(b-c)\,(1+tang\,b\,,\,tang\,c)+\ldots\ldots+tang\,(p-a)\,(1+tang\,p\,,\,tang\,a)=0.$$

Es iſt leicht einzuſehen, daſs man auf dieſe Art eine unendliche Menge Formeln derſelben Gattung finden kann.

144. Nimmt man an, daſs die Winkel $a$, $b$, $c$ ..., eine regelmäſsige Reihe bilden, deren Geſetz bekannt ſey, ſo bildet jede der eben angeführten Formeln auch eine regelmäſsige Reihe, wovon die Summe der Glieder ſchon gefunden iſt, da ſie $=0$ iſt. Ich nehme zum Beyſpiel an, daſs $a$, $b$, $c$ ..., in arithmetiſcher wachſender Reihe ſeyen, deren erſtes Glied und Verhältniſs $=a$, deren Zahl der Glieder $=m$, ſo hat man

$$a=a,\ b=2a,\ c=3a,\ d=4a,\ \ldots\ p=ma.$$

Alſo werden die beyden Formeln $(H)$, $(K)$, wenn man alles durch $-\sin a$ dividirt,

$$\sin 3a+\sin 5a+\sin 7a\ldots+\frac{\sin(m+1)a\,.\,\sin m-1)a}{-\sin a}=0$$

oder

$$\sin 3a+\sin 5a+\sin 7a\ldots+\sin(2m-1)a=\frac{\sin(m+1)a\,.\,\sin(m-1)a}{\sin a}$$

$$\cos 3a+\cos 5a+\cos 7a\ldots+\cos(2m-1)a=\frac{\cos(m+1)a\,.\,\sin(m-1)a}{\sin a}$$

welches bekannte Formeln ſind.

Setzt man dieſe Werthe in die (140) gefundenen Formeln (*F*), (*G*), und theilt man alles durch $-\sin a$, ſo werden ſie

$$\frac{1}{\sin a \,.\, \sin 2a} + \frac{1}{\sin 2a \,.\, \sin 3a} \ldots\ldots \text{u. ſ. w.}$$
$$= \frac{\sin (m-1)a}{\sin a^2 \,.\, \sin ma}$$

$$\frac{1}{\cos a \,.\, \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \,.\, \cos 3a} \ldots\ldots$$
$$= \frac{\sin (m-1)a}{\sin a \,.\, \cos a \,.\, \cos ma},$$

wo, weil $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$, und $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, man folgende Formeln erhält:

$$\operatorname{cosec} a \,.\, \operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} 2a \,.\, \operatorname{cosec} 3a \ldots\ldots =$$
$$= \sin (m-1)a \,.\, \operatorname{cosec} a^2 \,.\, \operatorname{cosec} ma$$

$$\sec a \,.\, \sec 2a \pm \sec 2a \,.\, \sec 3a \ldots\ldots + =$$
$$= \sin (m-1)a \,.\, \sec a \,.\, \operatorname{cosec} a \,.\, \sec ma.$$

## Dritter Abſchnitt.

**Bildung analytiſcher Tafeln, um ſowohl den Inbegriff der Verhältniſſe auszudrücken, die zwiſchen den verſchiedenen Theilen derſelben Figur beſtehen; als auch die Modifikationen, welche die andern correlativen Figuren von dieſer erſten Figur und von einander unterſcheiden.**

145. Ich werde hier bey verſchiedenen geometriſchen Figuren die Vergleichungstafeln anbringen, von denen ich im Anfange dieſes Werks eine Idee (2) gegeben habe; d. h. ich werde auf mehrere Beyſpiele die in den zwey erſten Abſchnitten entwickelten Grundſätze anwenden. Dabey verfahre ich ſo: Anfangs bilde ich die Tafel derjenigen Verhältniſſe, welche alle Theile des Syſtems, das ich als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen habe, unter einander binden, und nachher unterſuche ich die Veränderungen, welche der Ausdruck dieſer Verhältniſſe leiden muſs, wenn das Urſyſtem ſelbſt in verſchiedene Zuſtände der Umformung übergeht. Auch wird die Form dieſer Tafeln ſo eingerichtet werden, daſs dieſe Ver-

Digitized by Google

hältniſſe ſelbſt in ihrem Inbegriff betrachtet werden können, ſo daſs alle theilweiſen Verhältniſſe *implicite* darin begriffen ſind, und man jedes daraus herleiten kann, das zwiſchen beliebigen Quantitäten beſteht, die man aus dem Syſteme wählt, mögen dieſe Quantitäten lineär oder angulär ſeyn.

Die Zahl dieſer Verhältniſſe nimmt in dem Maaſse zu, in dem das Syſtem aus mehreren Theilen beſteht. Z. B. in einem Dreyeck ſind nur 6 Dinge zu betrachten, und in einem einfachen Vierecke, deſſen Seiten bis zu ihrem jedesmaligen Zuſammenſtoſsen verlängert ſind, ſchon 33; nämlich die 4 Seiten, die 2 Diagonalen, die 12 Abſchnitte, 2 und 2 auf jeder dieſer Seiten, oder Diagonalen gebildet, und endlich die 15 Winkel, die von dieſen 6 Linien, 2 und 2 betrachtet, eingeſchloſſen werden.

Aber die Zahl der beſondern Fragen, die bey jeder dieſer Figuren vorkommen, nimmt weit ſchneller zu, als die Zahl der Theile dieſer Figur ſelbſt. Da für das Dreyeck die allgemeine Frage dieſe iſt, wenn 3 von den 6 darin zu betrachtenden Dingen gegeben ſind (nur nicht die 3 Winkel), die andern 3 zu finden, ſo entſpringen daraus $\frac{6.5.4.3}{2.3} = 60$ beſondere Fragen, weniger den drey vorher ausgenommenen Fällen, wenn 3 Winkel gegeben ſind und 3 Seiten verlangt werden. Bey dem Viereck iſt die allgemeine Frage, wenn von den 3 darin zu betrachtenden Sachen irgend 5 gegeben ſind, die nicht von einander abhängen, die 28 Unbekannten zu finden.

Daraus entſpringen $\frac{33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6645408$ beſondere Fragen bis auf die kleine Zahl der vorhin ausgenommenen Fälle. Man kann daraus auf die Zahl der beſonderen Fragen ſchlieſsen, die ein Fünfeck oder höhere Polygone geben würden, und ſo ſehen, daſs es beynahe unmöglich iſt, Tafeln zu bilden, die unmittelbar jeder dieſer beſondern Fragen entſprächen. Es muſs alſo dieſem Mangel durch eine beſondere Form abgeholfen werden, aus der man, vermöge einiger algebraiſchen Operationen, jede Antwort ziehen kann, deren man in einem beſondern Fall bedarf. Und das iſt gerade meine Abſicht.

Dazu ſtelle ich mir vor, daſs in der vorgegebenen Figur eine Kette von Dreyecken beſtimmt iſt; dann der graphiſchen Conſtruktion folgend; indem man nach den gewöhnlichen Regeln der Trigonometrie von einem zum andern übergeht, berechnet man alle Lineär- und Angulärtheile, aus denen das Ganze beſteht. Noch mehr, man drückt ſie alle bloſs in Werthen von einigen unter ihnen aus, die man wie bekannt anſieht, und die in hinlänglicher Zahl da ſeyn müſſen, damit alle übrigen beſtimmt ſeyn können. Die Tafel, die hieraus entſteht, hat offenbar nur ſo viel Formeln, als Quantitäten im Syſtem ſind, und nun behaupte ich, daſs dieſe Tafel den Mangel der vorhin angeführten allgemeinen Tafel vertritt, deren Ausführung offenbar nicht möglich iſt.

In der That, da die neue Tafel nach der Hypotheſe alle Theile des Syſtems enthalten muſs, bloſs in Werthen von einigen unter ihnen berechnet, ſo hat

man augenſcheinlich die Verhältniſſe dieſer Quantitäten auf irgend eine Art, zwey und zwey, drey und drey, zuſammengeſtellt u. ſ. w. bloſs in Werthen von denſelben erſten Quantitäten, die als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen ſind. Man kann alſo, wenn man dieſe letzten herausſchafft, bloſs durch dieſe Grundtafel alle möglichen Verhältniſſe haben, die zwiſchen den Quantitäten des allgemeinen Syſtems beſtehen. Die folgenden Unterſuchungen ſollen dieſe Ideen entwickeln, und die Anwendung jedes Reſultats auf die correlativen Syſteme machen, welche auf die Urfigur bezogen werden können, auf welche die Betrachtungen gegründet und die Tafeln gebildet ſind.

## Neunte Aufgabe.

146. Ein Dreyeck iſt gegeben, und ein Perpendikel aus jedem der Winkel auf die gegenüberſtehende Seite geſenkt, man verlangt, daſs alle ſowohl anguläre, als lineäre Theile dieſer Figur, in Werthen von drey beliebigen unter ihnen ausgedrückt werden, die unabhängig von einander ſind, und die man als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen hat.

*ABC* (*Fig.* 28.) ſey das gegebene Dreyeck, $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ die Perpendikel, *D* ihr Durchſchnittspunkt. Man ſoll alſo alle Winkel und alle Linien, die zur Zuſammenſetzung dieſer Figur gehören, bloſs in Werthen von drey unter ihnen ausdrücken, weil durch drey alle übrigen ſchon genug beſtimmt ſind, wenn

nur dieſe drey von einander unabhängig ſind. Alſo können dieſe drey Quantitäten weder drey Winkel ſeyn, weil zwey von ihnen den dritten beſtimmen, noch eine der Linien des Syſtems mit den beyden auf ihr gebildeten Abſchnitten, weil, wenn zwey von dieſen lineären Quantitäten gegeben ſind, die dritte, die nothwendig ihre Summe oder ihr Unterſchied iſt, auch beſtimmt wäre.

Offenbar iſt die allgemeine Aufgabe der Trigonometrie als ein beſonderer Fall in dieſer Frage enthalten, wie ſchon (128) geſagt iſt, denn die ſechs in dem Dreyecke $ABC$ zu betrachtenden Dinge ſind unter denen, die zur Bildung der Tafel gehören. Aber damit dieſe Tafel einer gröſsern Anzahl beſonderer Fragen entſprechen könne, nehme ich auch die drey Linien $\overline{FG}$, $\overline{FH}$, $\overline{GH}$ darin auf, ſo wie den Halbmeſſer des umſchriebenen und des eingeſchriebenen Kreiſes, den Umfang und den Flächeninhalt deſſelben Dreyecks.

Ich nehme, ſo wie in der ſiebenten Aufgabe (122), als Maaſsſtab zur Vergleichung die beyden Winkel $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, die ich $m$, $n$ nenne, und den Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes $= R$. Alſo muſs ich, wie das offenbar möglich iſt, alle Quantitäten des allgemeinen Syſtems in Werthen von $m$, $n$, $R$ ausdrücken.

Den rechten Winkel werde ich durch $\pi$, den Halbmeſſer des eingeſchriebenen Kreiſes durch $r$, den Umfang durch $P$, und den Flächeninhalt $\overline{ABC}$ des gegebenen Dreyecks durch $S$ bezeichnen. Eben dieſe

Benennungen werde ich für die sechs folgenden Aufgaben beybehalten.

## Allgemeine Tafel der Verhältnisse, die zwischen den Winkeln und den Seiten eines Dreyecks bestehen, den aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten gesenkten Perpendikeln, den Abschnitten und den daraus entstehenden Winkeln u. s. w. (*Fig.* 28.).

### Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = m.$
2) $C\hat{A}D = n.$
3) $B\hat{A}C = m + n.$
4) $C\hat{B}D = n.$
5) $A\hat{B}D = \pi - (m + n).$
6) $A\hat{B}C = \pi - m.$
7) $B\hat{C}D = m.$
8) $A\hat{C}D = \pi - (m + n).$
9) $A\hat{C}B = \pi - n.$
10) $A\hat{D}B = \pi + n.$
11) $A\hat{D}C = \pi + m.$
12) $B\hat{D}C = 2\pi - (m + n).$

### Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = 2R \,.\, \mathit{sin}\,(m + n).$
14) $\overline{AC} = 2R \,.\, \mathit{cos}\, m.$
15) $\overline{AB} = 2R \,.\, \mathit{cos}\, n.$
16) $\overline{AD} = 2R \,.\, \mathit{cos}\,(m + n).$
17) $\overline{BD} = 2R \,.\, \mathit{sin}\, m.$

18) $\overline{CD} = 2R \cdot \sin n.$
19) $\overline{AH} = 2R \cdot \cos m \cdot \cos n.$
20) $\overline{BH} = 2R \cdot \sin m \cdot \cos n.$
21) $\overline{CH} = 2R \cdot \sin n \cdot \cos m.$
22) $\overline{DH} = 2R \cdot \sin m \cdot \sin n.$
23) $\overline{AF} = 2R \cdot \cos m \cdot \cos (m+n).$
24) $\overline{BF} = 2R \cdot \sin m \cdot \sin (m+n).$
25) $\overline{CF} = 2R \cdot \cos m \cdot \sin (m+n).$
26) $\overline{DF} = 2R \cdot \sin m \cdot \cos (m+n).$
27) $\overline{AG} = 2R \cdot \cos n \cdot \cos (m+n).$
28) $\overline{BG} = 2R \cdot \cos n \cdot \sin (m+n).$
29) $\overline{CG} = 2R \cdot \sin n \cdot \sin (m+n).$
30) $\overline{DG} = 2R \cdot \sin n \cdot \cos (m+n).$
31) $\overline{FG} = 2R \cdot \sin (m+n) \cdot \cos (m+n).$
32) $\overline{FH} = 2R \cdot \sin m \cdot \cos m.$
33) $\overline{GH} = 2R \cdot \sin n \cdot \cos n.$
34) $R = R.$
35) $P = 2R \cdot (\cos m + \cos n + \sin (m+n)).$
36) $r = R(\sin m + \sin n + \cos (m+n) - 1).$
37) $S = 2R^2 \cdot \cos m \cdot \cos n \cdot \sin (m+n).$

Die Bildung dieſer Tafel folgt offenbar aus der (122) gegebenen. Doch kann ſie auch leicht unmittelbar gebildet werden, denn alle Winkel findet man durch bloſse Addition oder Subtraktion, weil alle drey Winkel eines Dreyecks $= 2\pi$. Nachher erhält man alle Linien aus dem Satze, daſs ſich die Seiten eines Dreyecks wie die Sinus der gegenüberſtehenden Winkel verhalten. Nun weiſs man ſchon (122), daſs $\overline{AB} = 2R \cdot \cos n$, $\overline{AC} = 2R \cdot \cos m$, $\overline{BC} = 2R \cdot \sin (m+n)$.

Der

Der Werth von $P$ findet sich, indem man die vorigen Werthe der drey Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ addirt.

Der Werth von $r$ entspringt offenbar aus dem (137) bewiesenen Satze, wenn man in die Gleichung $2R + 2r = \overline{AD} + \overline{BC} + \overline{CD}$, die Werthe setzt, welche für diese drey Linien die 16te, 17te, 18te Formel der Tafel geben, und daraus den Werth von $r$ zieht.

Den Flächeninhalt $S$ findet man durch den bekannten Grundsatz, dass der Flächeninhalt jedes Dreyecks gleich dem Produkte zweyer Seiten ist, durch den halben Sinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt. Das giebt

$$S = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin(m+n),$$

wo man für $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ die Werthe der 15ten und 14ten Formel setzen muss.

Man kann eben so den Flächeninhalt der andern Dreyecke finden, die zur Zusammensetzung der untersuchten Figur gehören, wie

$$\overline{ADB},\ \overline{ADF},\ \overline{BCG} \text{ u. s. w.}$$

Die zweyten Ausdrücke dieser Formeln werden nach Bedürfniss, vermöge derer umgeformt, welche die (123) gebildete Tafel ausmachen, um die Verhältnisse der Lineo-angulär-Quantitäten im Allgemeinen auszudrücken.

147. Diese Tafel bezieht sich nur auf (*Fig.* 28.), die als Ursystem angenommen ist, wo das gegebene Dreyeck $ABC$ seine drey spitzen Winkel hat. Wir müssen jetzt untersuchen, welche Modifikationen sie leiden muss, wenn man sie auf den Fall anwenden

will, wenn einer von den Winkeln ſtumpf wäre. Dazu kann man auf zwey Arten kommen, entweder indem man die Rechnung ganz von vorne für die neue Figur anfängt, oder indem man unterſucht, welche Quantitäten bey dem Uebergange der einen in die andere invers werden und darin in den Formeln der Tafel das Zeichen einer jeden von ihnen verändert.

Wir wollen zuerſt annehmen, daſs der Winkel $BAC$ (*Fig.* 31.) ſtumpf werde; das kann nun geſchehen, wenn $A$ und $D$ ihre Stellungen verwechſeln. Dann iſt keine von den Quantitäten $m$, $n$, $R$, aus denen bloſs die letzten Glieder beſtehen, weder durch 0, noch durch $\infty$ gegangen: alſo bleibt jedes von dieſen letzten Gliedern ſo wie es iſt, ohne Veränderung der Zeichen. Jetzt wollen wir unterſuchen, was aus den erſten Gliedern wird.

Wenn nach der Hypotheſe $B\hat{A}C$ ſtumpf wird, oder $m + n > \pi$, ſo folgt aus der 5ten und 8ten Formel, daſs $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$ invers werden, und daſs folglich ihr Zeichen der Correlation — ſeyn muſs.

Noch mehr: der Coſinus eines ſtumpfen Winkels iſt invers (116), alſo vermöge der Formeln 16, 23, 26, 27, 30, 31 werden die Linien $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $\overline{FG}$ auch invers, und müſſen das Zeichen — annehmen: folglich wenn die Verhältniſſe der 37 Quantitäten, welche die erſten Glieder dieſer Formeln ſind, durch beliebige Gleichungen ausgedrückt wären; ſo brauchte man nur, um dieſe Gleichungen auf den Fall anwendbar zu machen, wo $B\hat{A}C$ ſtumpf wäre, in der erſten Tafel die Zeichen der acht Quan-

titäten $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $\overline{FG}$ zu ändern.

Das ſtimmt mit dem Reſultat überein, das die zweyte Horizontallinie der Tafel der Correlation (98) giebt; denn man ſieht eben ſo durch dieſe Tafel, daſs die Quantitäten, die invers ſind, und deren Zeichen man folglich verändern muſs, wie vorher $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$ ſind; nur $\overline{FG}$ findet ſich nicht da, weil ſie nicht im Syſtem enthalten war, nach dem die Tafel der Correlation gebildet iſt.

Jetzt wollen wir annehmen, daſs $A\hat{B}C$ ſtumpf werde (*Fig.* 32.); was geſchehen kann, wenn man ſich vorſtellt, daſs der Punkt $B$ ſich auf $BC$ bis jenſeits des Punktes $H$ bewege; hier wird offenbar unter den drey Quantitäten $m$, $n$, $R$, welche die zweyten Glieder der Formeln ausmachen, $m$ allein invers. Alſo ſetzt man $-m$ für $m$. Nun zu den erſten.

Weil $m$ invers wird, oder ſein Werth das negative Zeichen annimmt, ſo ſieht man aus der erſten und ſiebenten Formel, daſs $B\hat{A}D$ und $B\hat{C}D$ invers werden.

Noch mehr (116): *für* $m$ wird auch eine inverſe Quantität, alſo nach den Formeln 17, 20, 22, 24, 26, 32 müſſen die Quantitäten $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $\overline{FH}$ invers werden, und zum Zeichen der Correlation — erhalten. Wenn alſo die Verhältniſſe, welche unter den 37 Quantitäten beſtehen, welche die erſten Glieder dieſer Formeln ausmachen, durch beliebige Gleichungen ausgedrückt wären, ſo brauchte man nur, um dieſe Gleichungen auf die neue Hypotheſe

anwendbar zu machen (wenn $A\hat{B}C = \pi$), die Zeichen der acht folgenden Quantitäten darin zu verändern: $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$, $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $\overline{FH}$; was auch mit der dritten Horizontalreihe der (98) aufgestellten Tafel der Correlation übereinstimmt.

Aus demselben Grunde sieht man, dafs, wenn die Verhältnisse unter eben den 37 Quantitäten durch Gleichungen ausgedrückt sind, man, um diese Gleichungen auf den Fall anwendbar zu machen, wo der Winkel $A\hat{C}B$ (*Fig.* 33.) stumpf würde, nur darin die Zeichen folgender acht Quantitäten zu verändern brauchte: $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$, $\overline{CD}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $\overline{HG}$. Auch dieſs stimmt mit der vierten Zeile der (98) aufgestellten Tafel der Correlation überein.

148. Daraus können wir schliefsen,

1) dafs die Formeln der Tafel unmittelbar auf das Dreyeck $ABC$ angewendet werden, wenn die drey Winkel spitz sind (*Fig.* 28.).

2) Um sie so zu machen, wie man sie gefunden haben würde, wenn die Rechnung auf die Hypothese gegründet wäre, dafs $B\hat{A}C = \pi$, braucht man nur in den ersten Gliedern die Zeichen der acht Quantitäten, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, und nichts in den andern Gliedern zu verändern.

3) Um dieselbe Tafel so zu machen, wie man sie gefunden haben würde, wenn man die Rechnung auf die Hypothese gegründet hätte, dafs $A\hat{B}C = \pi$, mufs man in den zweyten Gliedern die Formeln $+m$ für $m$ setzen, und in den ersten

die Zeichen der acht Quantitäten, $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$, $BD$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $\overline{FH}$, verändern.

4) Hätte man endlich die Rechnung auf die Hypotheſe gegründet, daſs $A\hat{C}B = \pi$, und will die Tafel ſo machen, wie man ſie dann gefunden haben würde, ſo muſs man in den zweyten Gliedern die Formeln $-n$ für $n$ ſetzen, und in den erſten die Zeichen der acht Quantitäten $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$, $\overline{CD}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $\overline{HG}$, verändern.

Jetzt wollen wir einige beſondere Folgen aus dieſer allgemeinen Tafel ziehen.

149. Vergleiche ich $\overline{FG}$ mit $\overline{AD}$, ſo finde ich, daſs

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{AD}} = \sin(m+n) \text{ oder}$$

$$\overline{FG} : \overline{AD} = \sin(m+n) : 1,$$

d. h. in einem Vierecke, das, wie $AFDG$, zwey rechte Winkel hat, die ſich diagonal entgegengeſetzt ſind, verhält ſich dieſe Diagonale $\overline{FG}$ zur andern Diagonale $\overline{AD}$, wie der Sinus irgend eines der Winkel, die durch dieſe letzte Diagonale verbunden ſind, zum *ſin. totus*. Eben das ſieht man bey den Vierecken derſelben Gattung $BFDH$, $CGDH$ und $AFCH$, das aus zwey Dreyecken beſteht, die ſich am Scheitel entgegengeſetzt ſind, $AFD$, $CDH$, und das zwey rechte Winkel $A\hat{F}C$, $A\hat{H}C$ hat; denn ſeine beyden Diagonalen ſind $\overline{FH}$, $\overline{AC}$, nun hat man aus der Tafel

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{AC}} = \sin m, \text{ oder}$$

$$\overline{FH} : \overline{AC} = \sin m : 1.$$

Eben ſo bey den andern.

150. Vergleicht man $\overline{BD}$ mit $\overline{CD}$, so findet man

$$\overline{ED} : \overline{CD} = \sin m : \sin n,$$

oder weil $m$ das Complement von $A\hat{B}C$, und $n$ das Complement von $A\hat{C}B$ ist, so hat man

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \cos ABC : \cos ACB,$$

d. h. wie sich die Seiten eines Dreyecks zu den Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten, eben so verhalten sich die Cosinus eben dieser Winkel zu den Entfernungen ihrer Scheitelpunkte, von dem Punkte, wo sich die drey Perpendikel schneiden, die aus diesen Scheitelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gezogen werden.

151. Theilt man $\overline{AF}$ durch $\overline{AG}$, so erhält man $\frac{\cos m}{\cos n}$, eben so $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\cos m}{\cos n}$, also $\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ oder

$$\overline{AF} : \overline{AG} = \overline{AC} : \overline{AB}.$$

Also haben die Dreyecke $AGF$, $ABC$ einen gemeinschaftlichen Winkel zwischen proportionalen Seiten, also sind sie ähnlich, obgleich $\overline{FG}$ nicht mit $\overline{BC}$ parallel ist, aber sie sind das, was man antiparallel nennt, weil die gleichnamigen Seiten nach entgegengesetzten Richtungen liegen. Man könnte eben so beweisen, dass die andern Dreyecke $BFH$, $CGH$, auch jedes dem vorgenommenen Dreyecke $ABC$ ähnlich, und also auch unter einander ähnlich sind.

152. Beschreibt man über $\overline{BC}$ als Durchmesser einen Kreis, so geht der Umkreis durch die Punkte $F$, $G$, wegen der rechten Winkel $B\hat{F}C$, $B\hat{G}C$, also wird $BFGC$ ein eingeschriebenes Viereck seyn, und

folglich die bekannten Eigenſchaften dieſer Figur haben. So wird es auch mit $AGHB$, $AFHC$, $BFDH$ u. ſ. w. ſeyn, und die Formeln werden dieſelben Reſultate geben.

153. Multiplicire ich von der einen Seite $\overline{AH}$ mit $\overline{DH}$, ſo erhalte ich $\mathit{ſin}\ m \cdot \mathit{ſin}\ n \cdot \mathit{coſ}\ m \cdot \mathit{coſ}\ n$, und multiplicire ich von der andern Seite $\overline{BH}$ mit $CH$, ſo habe ich daſſelbe Reſultat. Alſo $\overline{AH} \cdot \overline{DH} = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$. Eben ſo findet man $\overline{BG} \cdot \overline{DG} = \overline{AG} \cdot \overline{CG}$ und $\overline{CF} \cdot \overline{DF} = \overline{AF} \cdot \overline{BF}$.

154. Erhebe ich die 13te und 16te Formel zum Quadrate und addire ſie, ſo erhalte ich $4R^2$, welches das Quadrat des Durchmeſſers des umſchriebenen Cirkels iſt. Eben das findet ſtatt, wenn ich die 14te und 17te, oder 15te und 18te quadrire und ſie addire, d. h. zwiſchen den vier Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ iſt die Summe der Quadrate der geraden Linie, die zwey davon mit einander verbindet, und derjenigen, welche die beyden andern zuſammenfügt, immer dieſelbe und dem Quadrate des Durchmeſſers des umſchriebenen Cirkels gleich.

155. Addire ich die im vorigen Abſchnitt vorkommenden ſechs Quadrate, nämlich $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$, $\overline{BC}^2$, $\overline{AD}^2$, $\overline{BD}^2$, $\overline{CD}^2$, ſo iſt die Summe $= 12R^2$, d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen der vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$, zwey und zwey genommen, iſt dem dreyfachen Quadrate des Durchmeſſers des umſchriebenen Cirkels gleich.

156. Multiplicirt man von einer Seite die 14te und 15te Formel, und von der andern die 19te durch $2R$, ſo erhält man daſſelbe Produkt, alſo $\overline{AC} \cdot \overline{AB}$

$= \overline{AH} \cdot 2R$ oder $\overline{AH} : \overline{AB} = \overline{AC} : 2R$, d. h. in jedem Dreyecke verhält ſich der aus einem Winkel auf die entgegengeſetzte Seite geſenkte Perpendikel zu irgend einer von den dieſen Winkel einſchlieſsenden Seiten, wie die andere zum Durchmeſſer des umſchriebenen Cirkels, wie bekannt iſt.

157. Multiplicirt man die 15te und 18te Formel mit einander, und die 33ſte mit $2R$, ſo erhält man gleiche Reſultate. Alſo $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{GH} \cdot 2R$.

158. Multiplicirt man die 20ſte, 23ſte und 29ſte Formel, und eben ſo die 21ſte, 24ſte und 27ſte, ſo erhält man daſſelbe Reſultat. Alſo

$$\overline{AF} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{CG} = \overline{AG} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CH}.$$

159. Multiplicirt man von einer Seite die 14te, 26ſte und 28ſte Formel, und von der andern die 17te, 25ſte und 27ſte, ſo erhält man daſſelbe Reſultat. Alſo

$$\overline{AC} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{DF} = \overline{AG} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CF}.$$

Alle dieſe Zuſammenſtellungen, die man ins Unendliche fortſetzen kann, geben, wie man ſieht, eine Menge Lehrſätze, die man ſehr mühſam einzeln aufſuchen würde. Da nun die Tafel alle Quantitäten des Syſtems enthält, ſo ſchlieſst ſie auch *implicite* alle ihre Eigenſchaften in ſich. So kann man beſonders jedes Verhältniſs daraus ziehen, deſſen man bedarf, wie man an den andern Tafeln ſehen wird, die wir aus dieſer erſten in den folgenden Aufgaben ziehen werden.

## Zehnte Aufgabe.

160. Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel, und die einem entgegengeſetzte

Seite gegeben ſind, zu finden: 1) den dritten Winkel und die beyden andern Seiten; 2) die aus den Winkeln auf die gegenüberſtehenden Seiten geſenkten Perpendikel; 3) die Segmente und Winkel, die aus den wechſelſeitigen Durchſchnitten aller dieſer Linien entſtehen; 4) die drey geraden Linien, die den Fuſs dieſer Perpendikel zwey und zwey verbinden u. ſ. w. (*Fig.* 28.).

Wir wollen als die beyden gegebenen Winkel $A\hat{B}C$ und $A\hat{C}B$, als die bekannte Seite $\overline{AC}$ annehmen; man ſoll alſo alle in der vorher gebildeten Tafel aufgezählte Quantitäten in Werthen von den drey Quantitäten $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ und $\overline{AC}$ finden.

Aber da durch die erſte Tafel alle dieſe Quantitäten in Werthen der drey $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $R$ ſich ausgedrückt finden, ſo braucht man nur die neuen gegebenen Quantitäten den vorigen zu ſubſtituiren.

Um den Ausdruck der zweyten Glieder abzukürzen, wollen wir annehmen, daſs

$$A\hat{B}C = B.$$
$$A\hat{C}B = C.$$
$$\overline{AC} = b.$$

Ferner ſuche ich unter den Formeln der vorigen Tafel die drey, welche die neuen Gegebenen $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $\overline{AC}$ in Werthen von $m$, $n$, $R$ ausdrücken (die 6te, 9te und 14te Formel). Ich ziehe umgekehrt aus dieſen Formeln $m$, $n$, $R$ in Werthen die drey andern, und ſetze ſie in alle Formeln der erſten Tafel. Daraus entſteht augenſcheinlich eine neue Tafel, wo

jede der Quantitäten des Syſtems, ſo wie man es verlangt, in Werthen von $B$, $C$, $b$ ausgedrückt ſeyn wird.

Nun ſind die 6te, 7te und 14te Formel

$$B = \pi - m,$$
$$C = \pi - n,$$
$$b = 2R \cdot \mathit{cof}\ m.$$

Alſo aus dieſen drey Gleichungen muſs man die Werthe von $m$, $n$, $R$ als unbekannte ziehen, um ſie in allen Formeln der Tafel zu ſubſtituiren.

Die erſte Gleichung giebt mir $m = \pi - B$; alſo $\mathit{ſin}\ m = \mathit{cof}\ B$, und $\mathit{cof}\ m = \mathit{ſin}\ B$.

Die zweyte giebt $n = \pi - C$; alſo $\mathit{ſin}\ n = \mathit{cof}\ C$, und $\mathit{cof}\ n = \mathit{ſin}\ C$.

Die dritte giebt, wenn ich für $\mathit{cof}\ m$ den eben gefundenen Werth ſetze, $2R = \frac{b}{\mathit{ſin}\ B}$.

Man braucht alſo nur in der Tafel dieſe Werthe von $m$, $n$, $R$ zu ſubſtituiren, um alle dahin gehörigen Quantitäten durch $B$, $C$, $b$ ausgedrückt zu haben.

So entſteht folgende Tafel, die alſo der Aufgabe Genüge leiſtet.

Tafel, um, wenn in einem Dreyeck $ABC$ zwey Winkel $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ und die einem entgegengeſetzte Seite $\overline{AC}$ bekannt ſind, unmittelbar zu finden: 1) die drey andern in dem Dreyecke zu betrachtenden Dinge; 2) die Perpendikel aus jedem Winkel auf die entgegenſtehende Seite geſenkt, alle Winkel und Segmente, die aus dieſer Conſtruktion entſpringen u. ſ. w.

Man nimmt $A\hat{B}C = B$, $A\hat{C}B = C$, $\overline{AC} = b$ an (*Fig.* 28).

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = \pi - B$.
2) $C\hat{A}D = \pi - C$.
3) $B\hat{A}C = 2\pi - (B + C)$.
4) $C\hat{B}D = \pi - C$.
5) $A\hat{B}D = (B + C) - \pi$.
6) $A\hat{B}C = B$.
7) $B\hat{C}D = \pi - B$.
8) $A\hat{C}D = (B + C) - \pi$.
9) $A\hat{C}B = C$.
10) $A\hat{D}B = 2\pi - C$.
11) $A\hat{D}C = 2\pi - B$.
12) $B\hat{D}C = B + C$.

Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = b\,\frac{\sin(B+C)}{\sin B}$.
14) $\overline{AC} = b$.
15) $\overline{AB} = b\,\frac{\sin C}{\sin B}$.

16) $\overline{AD} = -b\,\frac{\mathit{cof}\,(B+C)}{\mathit{fin}\,B}$.

17) $\overline{BD} = b\,.\,\mathit{cot}\,B$.

18) $\overline{CD} = b\,.\,\frac{\mathit{cof}\,C}{\mathit{fin}\,B}$.

19) $\overline{AH} = b\,.\,\mathit{fin}\,C$.

20) $\overline{BH} = b\,.\,\mathit{fin}\,C\,.\,\mathit{cot}\,B$.

21) $\overline{CH} = b\,.\,\mathit{cof}\,C$.

22) $\overline{DH} = b\,.\,\mathit{cof}\,C\,.\,\mathit{cot}\,B$.

23) $\overline{AF} = -b\,.\,\mathit{cof}\,(B+C)$.

24) $\overline{BF} = b\,.\,\mathit{cot}\,B\,.\,\mathit{fin}\,(B+C)$.

25) $\overline{CF} = b\,.\,\mathit{fin}\,(B+C)$.

26) $\overline{DF} = -b\,.\,\mathit{cot}\,B\,.\,\mathit{cof}\,(B+C)$.

27) $\overline{AG} = -b\,\frac{\mathit{fin}\,C\,.\,\mathit{cof}\,(B+C)}{\mathit{fin}\,B}$.

28) $\overline{BG} = b\,.\,\frac{\mathit{fin}\,C\,.\,\mathit{fin}\,(B+C)}{\mathit{fin}\,B}$.

29) $\overline{CG} = b\,\frac{\mathit{cof}\,C\,.\,\mathit{fin}\,(B+C)}{\mathit{fin}\,B}$.

30) $\overline{DG} = -b\,.\,\frac{\mathit{cof}\,C\,.\,\mathit{cof}\,(B+C)}{\mathit{fin}\,B}$.

31) $\overline{FG} = -b\,.\,\frac{\mathit{fin}\,(B+C)\,.\,\mathit{cof}\,(B+C)}{\mathit{fin}\,B}$.

32) $\overline{FH} = b\,.\,\mathit{cof}\,B$.

33) $\overline{GH} = b\,\frac{\mathit{fin}\,C\,.\,\mathit{cof}\,C}{\mathit{fin}\,B}$.

34) $R = \frac{b}{2\,.\,\mathit{fin}\,B}$.

35) $P = b\,\frac{\mathit{fin}\,B + \mathit{fin}\,C + \mathit{cof}\,(B+C)}{2\,\mathit{fin}\,B}$.

36) $r = b \frac{\cos B + \cos C + \cos (B+C) - 1}{2 \sin B}$.

37) $S = \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin (B+C) \frac{\sin C}{\sin B}$.

Die vorhergehende Tafel ist nur auf das Dreyeck anwendbar, das man als Ursystem annahm; d. h. welches drey spitzige Winkel hat. So muss man hier die schon (147 folgg.) gemachten Bemerkungen wiederholen, aus denen sich ergiebt:

1) In keinem Fall sind mit den zweyten Gliedern der Formeln Veränderungen vorzunehmen, um sie auf die correlativen Systeme anwendbar zu machen, weil keine von den drey Quantitäten $B$, $C$, $b$ weder durch o, noch durch $\infty$ geht.

2) Wird $B\hat{A}C$ stumpf, so muss man die Zeichen von $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $\overline{FG}$ darin verändern.

3) Wird $A\hat{B}C$ stumpf, so verändert man die Zeichen von $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$, $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $\overline{FH}$.

4) Wird $A\hat{C}B$ stumpf, so verändert man die Zeichen von $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$, $\overline{CD}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $\overline{GH}$.

## Eilfte Aufgabe.

**161. Es sind in einem Dreyecke zwey Winkel und die dazwischen liegende Seite gegeben, und man sucht 1) den dritten Winkel und die beyden andern Seiten, 2) die Perpendikel aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten, 3) die**

Segmente und Winkel, die aus den Durchschnitten dieser Linien entstehen, 4) die drey Linien, die den Fuss dieser Perpendikel verbinden u. s. w.

Die Winkel (*Fig.* 28.) seyen $A\hat{B}C = B$, $A\hat{C}B = C$, die Seite $\overline{BC} = a$.

Ich suche in den Formeln der Grundtafel (146) diejenigen, welche die neuen Gegebenen in Werthen der drey ersten $m$, $n$, $R$ ausdrücken, nämlich die 6te, 9te und 13te,

$$B = \pi - m,$$

$$C = \pi - n,$$

$$a = 2R \cdot \sin(m + n).$$

Aus diesen Gleichungen ziehe man $m$, $n$, $R$, als Unbekannte, um sie in allen Formeln der Tafel zu substituiren.

Die erste Gleichung giebt mir $m = \pi - B$, folglich $\sin m = \cos B$, und $\cos m = \sin B$.

Die zweyte giebt $n = \pi - C$, folglich $\sin n = \cos C$, und $\cos n = \sin C$.

Die dritte $a = 2R \cdot \sin(B + C)$, also

$$R = \frac{a}{2\sin(B + C)}.$$

Diese drey Werthe von $m$, $n$, $R$ setzt man in die Grundtafel, um alle darin vorkommenden Quantitäten in $B$, $C$, $a$ ausgedrückt zu erhalten, so entsteht folgende Tafel, die der Aufgabe Genüge leistet.

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = \pi - B$.

2) $C\hat{A}D = \pi - C$.

3) $B\hat{A}C = 2\pi - (B + C)$.
4) $C\hat{B}D = \pi - C$.
5) $A\hat{B}D = (B + C) - \pi$.
6) $A\hat{B}C = B$.
7) $B\hat{C}D = \pi - B$.
8) $A\hat{C}D = (B + C) - \pi$.
9) $A\hat{C}B = C$.
10) $A\hat{D}B = 2\pi - C$.
11) $A\hat{D}C = 2\pi - B$.
12) $B\hat{D}C = B + C$.

Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = a$.
14) $\overline{AC} = a \cdot \frac{\sin B}{\sin (B + C)}$.
15) $\overline{AB} = a \cdot \frac{\sin C}{\sin (B + C)}$.
16) $\overline{AD} = -a \cdot \cot (B + C)$.
17) $\overline{BD} = a \cdot \frac{\cos B}{\sin (B + C)}$.
18) $\overline{CD} = a \cdot \frac{\cos C}{\sin (B + C)}$.
19) $\overline{AH} = a \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin (B + C)}$.
20) $\overline{BH} = a \cdot \frac{\sin C \cdot \cos B}{\sin (B + C)}$.
21) $\overline{CH} = a \cdot \frac{\sin B \cdot \cos C}{\sin (B + C)}$.
22) $\overline{DH} = a \cdot \frac{\cos B \cdot \cos C}{\sin (B + C)}$.
23) $\overline{AF} = -a \cdot \sin B \cdot \cot (B + C)$.
24) $\overline{BF} = a \cdot \cos B$.

25) $\overline{CF} = a \cdot \sin B.$

26) $\overline{DF} = -a \cdot \cos B \cdot \cot (B + C).$

27) $\overline{AG} = -a \cdot \cos C \cdot \cot (B + C).$

28) $\overline{BG} = a \cdot \sin C.$

29) $\overline{CG} = a \cdot \cos C.$

30) $DG = -a \cdot \cos C \cdot \cot (B + C).$

31) $\overline{FG} = -\frac{1}{2} a \cdot \frac{\sin (2B + 2C)}{\sin (B + C)}.$

32) $\overline{FH} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sin 2B}{\sin (B + C)}.$

33) $\overline{GH} = \frac{1}{2} a \frac{\sin 2C}{\sin (B + C)}.$

34) $R = \frac{a}{2 \sin (B + C)}.$

35) $P = a \cdot \frac{\sin B + \sin C + \sin (B + C)}{\sin (B + C)}.$

36) $r = a \cdot \frac{\cos B + \cos C - \cos (B + C) - 1}{2 \sin (B + C)}.$

37) $S = 2 a^2 \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin (B + C)}.$

Man muſs bey dieſer Tafel dieſelben Betrachtungen wie bey der vorigen anſtellen; nachdem $B\hat{A}C$ oder $A\hat{B}C$ oder $A\hat{C}B$ ſtumpf wird, verändere man die Zeichen von $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $\overline{FG}$, oder von $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$, $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $\overline{FH}$, oder endlich von $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$, $\overline{CD}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $\overline{GH}$.

## Zwölfte Aufgabe.

162. Es ſind in einem Dreyecke zwey Seiten, und der Winkel, welcher der einen gegen-

gegenüber ſteht, gegeben, man ſucht 1) die dritte Seite und die beyden andern Winkel, 2) die Perpendikel aus den Winkeln auf die gegenüberſtehenden Seiten, 3) die Segmente und Winkel, die aus den Durchſchnitten dieſer Linien entſtehen u. ſ. w.

Gegeben ſey (*Fig.* 28.) $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $A\hat{B}C = B$. Ich ziehe aus der Grundtafel die drey Gleichungen (die 14te, 15te und 6te):

$$b = 2R \cdot \mathit{cof}\, m$$
$$c = 2R \cdot \mathit{cof}\, n$$
$$B = \pi - m.$$

Hieraus ſoll ich $m$, $n$, $R$ als Unbekannte beſtimmen, um ſie nachher in die Formeln der Tafel zu ſetzen.

Eliminire ich $R$ aus den beyden erſten Gleichungen, ſo erhalte ich $b \cdot \mathit{cof}\, n = c \cdot \mathit{cof}\, m$. Da nun $\mathit{cof}\, m = \mathit{ſin}\, B$, ſo habe ich auch $b \cdot \mathit{cof}\, n = c \cdot \mathit{ſin}\, B$ oder $\mathit{cof}\, n = \frac{c}{b}\, \mathit{ſin}\, B$. Setze ich denſelben Werth von $\mathit{cof}\, m$ in die Gleichung $b = 2R \cdot \mathit{cof}\, m$, ſo erhalte ich $b = 2R \cdot \mathit{ſin}\, B$ oder $R = \frac{b}{2\, \mathit{ſin}\, B}$.

Es giebt alſo folgende Gleichungen, um $m$, $n$, $R$ zu beſtimmen:

$$m = \pi - B$$
$$\sin m = \cos B$$
$$\cos m = \sin B$$
$$\cos n = \frac{c}{b} \sin B$$
$$\sin n = \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - c^2 . \sin B^2}$$
$$R = \frac{b}{2 \sin B}.$$

Setzt man dieſe Werthe in die Grundtafel, ſo entſteht folgende, die der Aufgabe genug thut.

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = \pi - B.$

2) $\cos C\hat{A}D = \frac{c}{b} \sin B.$

3) $\sin B\hat{A}C = \frac{c}{b} \sin B . \cos B + \frac{\sin B}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}.$

4) $\cos C\hat{B}D = \frac{c}{b} \sin B.$

5) $\cos A\hat{B}D = \frac{c}{b} \sin B . \cos B + \frac{\sin B}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}.$

6) $A\hat{B}C = B.$

7) $B\hat{C}D = \pi - B.$

8) $\cos A\hat{C}D = \frac{c}{b} \sin B . \cos B + \frac{\sin B}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}.$

9) $\sin A\hat{C}B = \frac{c}{b} \sin B.$

10) $\sin A\hat{D}B = \frac{c}{b} \sin B.$

11) $A\hat{D}C = 2\pi - B.$

12) $\sin B\hat{D}C = \frac{c}{b} \sin B . \cos B + \frac{\sin B}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}.$

## Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = c \cdot \cos B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

14) $\overline{AC} = b$.

15) $\overline{AB} = c$.

16) $\overline{AD} = c \cdot \sin B - \cot B \cdot \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

17) $\overline{BD} = b \cdot \cot B$.

18) $\overline{CD} = \frac{1}{\sin B} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

19) $\overline{AH} = c \cdot \sin B$.

20) $\overline{BH} = c \cdot \cos B$.

21) $\overline{CH} = \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

22) $\overline{DH} = \cot B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

23) $\overline{AF} = c \cdot \sin B^2 - \cos B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

24) $\overline{BF} = c \cdot \cos B^2 + \cos B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

25) $\overline{CF} = c \cdot \sin B \cdot \cos B + \sin B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

26) $\overline{DF} = c \cdot \sin B \cdot \cos B - \cos B \cdot \cot B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

27) $\overline{AG} = \frac{c^2}{b} \sin B^2 - \frac{c}{b} \cos B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

28) $\overline{BG} = \frac{c^2}{b} \sin B \cdot \cos B + \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

29) $\overline{CG} = \frac{c}{b} \cos B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2} + b - \frac{c^2}{b} \sin B^2$.

30) $\overline{DG} = \frac{c}{b} \sin B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2} - b \cot B + \frac{c^2}{b} \sin B \cdot \cos B$.

31) $\overline{FG} = (c \cdot \cos B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}) \left(\frac{c}{b} \sin B^2 - \frac{c}{b} \cos B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}\right)$.

32) $\overline{FH} = b \cdot \cos B$.

33) $\overline{GH} = \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

34) $R = \frac{b}{2 \cdot \sin B}$

35) $P = b + c + c \cdot \cos B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

36) $r = \frac{1}{2} c \cdot \sin B - \frac{1 - \cos B}{2 \cdot \sin B}(b - \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2})$.

37) $S = \frac{1}{2} c^2 \sin B \cdot \cos B + \frac{1}{2} c \cdot \sin B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

Soll dieſe Tafel auf andere Dreyecke als ſpitzwinklichte bezogen werden, ſo braucht man nur die vorher angeſtellten Beobachtungen zu wiederholen.

## Dreyzehnte Aufgabe.

163. In einem Dreyecke ſind zwey Seiten und der eingeſchloſſene Winkel gegeben, man ſucht daſſelbe wie bey den vorigen Aufgaben.

Gegeben ſey (*Fig.* 28.) $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $A\hat{B}C = B$. Wir ſollen alle Quantitäten des Syſtems in Werthen von $c$, $a$, $B$ ausdrücken.

Dazu gebrauche ich die 13te, 15te und 6te Formel der Grundtafel, nämlich

$$a = 2R \cdot \sin(m + n)$$
$$c = 2R \cdot \cos n$$
$$B = \pi - m.$$

Daraus erhalte ich

$a \cdot \cos n = c \cdot \cos B \cdot \cos n + c \cdot \sin n \cdot \sin B$ oder

$\cos n \cdot (a - c \cdot \cos B) = c \cdot \sin B \sqrt{1 - \cos n^2}$ oder

$\cos n^2 (a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B) = c^2 \sin B^2$ oder

$$\cos n = \frac{c \cdot \sin B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$$ und folglich

$$\sin n = \frac{a - \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}.$$

Setzt man diesen Werth von $cos\ n$ in die Gleichung $c = 2R \cdot cos\ n$, so erhält man

$$R = \frac{1}{2\ sin\ B}\sqrt{a^2+c^2-2ac\ .\ cos\ B}$$

So entsteht folgende Tafel:

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = \pi - B.$

2) $cos\ C\hat{A}D = \dfrac{2\ .\ sin\ B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\ .\ cos\ B}}.$

3) $cos\ B\hat{A}C = \dfrac{c-a\ cos\ B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\ .\ cos\ B}}.$

4) $cos\ C\hat{B}D = \dfrac{c\ .\ sin\ B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\ .\ cos\ B}}.$

5) $sin\ A\hat{B}D = \dfrac{c-a\ .\ cos\ B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\ .\ cos\ B}}.$

6) $A\hat{B}C = B.$

7) $B\hat{C}D = \pi - B.$

8) $sin\ A\hat{C}D = \dfrac{c-a\ .\ cos\ B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\ .\ cos\ B}}.$

9) $sin\ A\hat{C}B = \dfrac{c\ .\ sin\ B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\ .\ cos\ B}}.$

10) $sin\ A\hat{D}B = \dfrac{c\ .\ sin\ B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\ .\ cos\ B}}.$

11) $A\hat{D}C = 2\pi - B.$

12) $sin\ B\hat{D}C = \dfrac{a\ .\ sin\ B}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\ .\ cos\ B}}.$

Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = a.$

14) $\overline{AC} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}.$

15) $\overline{AB} = c.$

16) $\overline{AD} = \frac{c - a \cdot \cos B}{\sin B}.$

17) $\overline{BD} = \cot B \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}.$

18) $\overline{CD} = \frac{a - c \cdot \cos B}{\sin B}.$

19) $\overline{AH} = c \cdot \sin B.$

20) $\overline{BH} = c \cdot \cos B.$

21) $\overline{CH} = c - c \cdot \cos B.$

22) $\overline{DH} = a \cot B - c \cdot \cos B \cdot \cot B.$

23) $\overline{AF} = c - a \cdot \cos B.$

24) $\overline{BF} = a \cdot \cos B.$

25) $\overline{CF} = a \cdot \sin B.$

26) $\overline{DF} = c \cdot \sin C \cdot \cot B - a \cdot \cos B \cdot \cot B.$

27) $\overline{AG} = \frac{c^2 - ac \cdot \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}.$

28) $\overline{BG} = \frac{ac \cdot \sin B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}.$

29) $\overline{CG} = \frac{a^2 - a \cdot \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}.$

30) $\overline{DG} = \frac{(a - c \cdot \cos B)(c - a \cdot \cos B)}{\sin B \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}.$

31) $\overline{FG} = \frac{ac - a^2 \cdot \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}.$

32) $\overline{FH} = \cos B \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}.$

33) $\overline{GH} = \frac{ac - c^2 \cdot \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}.$

34) $R = \frac{1}{2 \cdot \sin B} \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}$.

35) $P = a + c + \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}$.

36) $r = \frac{ac \cdot \sin B}{a + c + \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

37) $S = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$.

Man muſs hier dieſelben Betrachtungen anſtellen wie (162).

## Vierzehnte Aufgabe.

164. In einem Dreyecke ſind die drey Seiten gegeben, man ſucht die drey Winkel und alles übrige wie vorhin.

Gegeben ſey $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ (*Fig.* 28.); man ſoll alſo alle in der Tafel aufgeführte Quantitäten in Werthen dieſer drey finden.

Dazu dient mir die 13te, 14te und 15te Formel der Grundtafel, nämlich

$$a = 2R \cdot \sin (m + n)$$
$$b = 2R \cdot \cos m$$
$$c = 2R \cdot \cos n.$$

Aus dieſen drey Gleichungen ſoll ich die Werthe von $m$, $n$, $R$ ziehen und ſie in die Formeln der Grundtafel ſetzen. Ich entwickele dazu $\sin (m + n)$, ſo erhalte ich

1) $a = 2R \cdot \sin m \cdot \cos n + 2R \cdot \sin n \cdot \cos m$.
2) $b = 2R \cdot \cos m$.
3) $c = 2R \cdot \cos n$.

Setze ich in die erſte für $\cos m$ deſſen Werth

aus der zweyten, und für $cos\, n$ deſſen Werth aus der dritten, ſo erhalte ich

$$a = c \,.\, sin\, m + b \,.\, sin\, n.$$

Schafft man nun $R$ aus den letzten beyden, ſo kommt

$$b \,.\, cos\, n = c \,.\, cos\, m.$$

Aus dieſen beyden neuen Gleichungen muſs man $m$ und $n$ ziehen.

In der erſten verſetze ich $b \,.\, sin\, n$ und quadrire, ſo kommt

$$a^2 + b^2\, sin\, n^2 - 2ab \,.\, sin\, n = c^2\, sin\, m^2,$$

auch die zweyte quadrire ich, das giebt

$$b^2\, cos\, n^2 = c^2 \,.\, cos\, m^2.$$

Addire ich dieſe Gleichung zur vorigen, ſo kommt, weil bekanntlich $sin\, m^2 + cos\, m^2 = 1$,

$a^2 + b^2 - 2ab \,.\, sin\, n = c^2$, alſo $sin\, n = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

$$\text{eben ſo } sin\, m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Nun ſoll man $R$ finden. Aus der letzten folgt

$$cos\, m = \frac{1}{2ac}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Hieraus, und aus (2) ergiebt ſich

$$R = \frac{abc}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}}.$$

Statt dieſes Werthes wird man in der Tafel nur um Raum zu ſparen, $R$ ſetzen.

## Werthe der Winkel.

1) $sin\, \hat{BAD} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

2) $\sin C\hat{A}D = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

3) $\cos B\hat{A}C = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

4) $\sin C\hat{B}D = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

5) $\sin A\hat{B}D = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

6) $\cos A\hat{B}C = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

7) $\sin B\hat{C}D = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

8) $\sin A\hat{C}D = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

9) $\cos A\hat{C}B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

10) $\cos A\hat{D}B = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$.

11) $\cos A\hat{D}C = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}$.

12) $\cos B\hat{D}C = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$.

## Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = a$.

14) $\overline{AC} = b$.

15) $\overline{AB} = c$.

16) $\overline{AD} = R \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$.

17) $\overline{BD} = R \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac}$.

18) $\overline{CD} = R \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$.

19) $\overline{AH} = \frac{bc}{2R}$.

20) $\overline{BH} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$.

21) $\overline{CH} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$.

22) $\overline{DH} = R \cdot \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{2a^2bc}$.

23) $\overline{AF} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

24) $\overline{BF} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$.

25) $\overline{CF} = \frac{ab}{2R}$.

26) $\overline{DF} = R \cdot \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{2c^2ab}$.

27) $\overline{AG} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$.

28) $\overline{BG} = \frac{ac}{2R}$.

29) $\overline{CG} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$.

30) $\overline{DG} = R \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2b^2ac}$.

31) $\overline{FG} = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$.

32) $\overline{FH} = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$.

33) $\overline{GH} = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$.

34) $R = \frac{abc}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}}$

35) $P = a + b + c$.

36) $r = \frac{1}{2} r \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)}{a+b+c}}$.

37) $S = r\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}$.

Man kann dieſelben Betrachtungen wie (162) hier anſtellen.

## Funfzehnte Aufgabe.

165. In einem Dreyecke iſt der Perpendikel aus einem Winkel auf die gegenüberſtehende Seite gegeben, ſo wie auch die beyden Segmente, die er darauf bildet, man ſucht die drey Seiten und drey Winkel dieſes Dreyecks u. ſ. w.

Die beyden Segmente $\overline{BH}$, $\overline{CH}$ (*Fig.* 28.) ſollen $x$ und $x'$ heiſsen, der Perpendikel $\overline{AH}$ heiſse $y$.

In der 19ten, 20ſten, 21ſten Formel der Grundtafel (146) finde ich $x$, $x'$, $y$ in Werthen von $m$, $n$, $R$, nämlich

1) $y = 2R \,.\, cof\, m \,.\, cof\, n$

2) $x = 2R \,.\, ſin\, m \,.\, cof\, n$

3) $x' = 2R \,.\, ſin\, n \,.\, cof\, m$.

Schaffe ich $R$ aus den beyden erſten, ſo erhalte ich $\frac{x}{y} = \frac{ſin\, m}{cof\, m}$; aus der erſten und dritten, ſo kommt $\frac{x'}{y} = \frac{ſin\, n}{cof\, n}$.

Die erſte Gleichung giebt $\frac{x^2}{y^2} = \frac{1 - cof\, m^2}{cof\, m^2}$ oder

$cof\, m = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; alſo $fin\, m = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Eben ſo hat man $cof\, n = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$ und $fin\, n = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$.

Setze ich dieſe Werthe von $cof\, m$ und $cof\, n$ in (1), ſo erhalte ich

$$R = \frac{1}{\Sigma y}\sqrt{(x^2 + y^2)\,(x'^2 + y^2)}.$$

Daraus entſteht folgende Tafel.

Werthe der Winkel.

1) $tang\ \hat{BAD} = \frac{x}{y}$.

2) $tang\ \hat{CAD} = \frac{x'}{y}$.

3) $tang\ \hat{BAC} = \frac{y(x + x')}{y^2 - xx'}$.

4) $tang\ \hat{CBD} = \frac{x'}{y}$.

5) $tang\ \hat{ABD} = \frac{y^2 - xx'}{y(x \pm x')}$.

6) $tang\ \hat{ABC} = \frac{y}{x}$.

7) $tang\ \hat{BCD} = \frac{x}{y}$.

8) $tang\ \hat{ACD} = \frac{y^2 - xx'}{y(x + x')}$.

9) $tang\ A\hat{C}B = \frac{y}{x'}$.

10) $tang\ A\hat{D}B = -\frac{y}{x'}$.

11) $tang\ A\hat{D}C = -\frac{y}{x}$.

12) $tang\ B\hat{D}C = \frac{y(x+x')}{xx'-y^2}$.

**Werthe der Linien.**

13) $\overline{BC} = x + x'$.

14) $\overline{AC} = \sqrt{x'^2 + y^2}$.

15) $\overline{AB} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

16) $\overline{AD} = \frac{y^2 - xx'}{y}$.

17) $\overline{BD} = \frac{x}{y}\sqrt{x'^2 + y^2}$.

18) $\overline{CD} = \frac{x'}{y}\sqrt{x^2 + y^2}$.

19) $\overline{AH} = y$.

20) $\overline{BH} = x$.

21) $\overline{CH} = x'$.

22) $\overline{DH} = \frac{xx'}{y}$.

23) $\overline{AF} = \frac{y^2 - xx'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

24) $\overline{BF} = \frac{x(x+x')}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

25) $\overline{CF} = \frac{y(x+x')}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

26) $\overline{DF} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2 - xx'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

27) $\overline{AG} = \frac{y^2 - x x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$.

28) $\overline{BG} = \frac{y\,(x + x')}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$.

29) $\overline{CG} = \frac{x'(x + x')}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

30) $\overline{DG} = \frac{x'}{y} \cdot \frac{(y^2 - x x')}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$.

31) $\overline{FG} = \frac{(x + x') \cdot (y^2 - x x)}{\sqrt{(x^2 \pm y^2)\,(x'^2 + y^2)}}$.

32) $\overline{FH} = x \sqrt{\frac{x'^2 + y^2}{x^2 + y^2}}$.

33) $\overline{GH} = x' \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x'^2 + y^2}}$.

34) $R = \frac{1}{2y} \sqrt{(x^2 + y^2)\,(x'^2 + y^2)}$.

35) $P = x + x' \pm \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y^2}$.

36) $r = \frac{y\,(x + x')}{x + x' + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y^2}}$.

37) $S = \frac{1}{2} y\,(x + x')$.

166. Alle dieſe Tafeln (160, 161, 162, 163, 164, 165) entſpringen aus der einen Grundtafel (146). So iſt es immer nur dieſelbe Tafel unter verſchiedenen Formen, die ſo geeignet iſt, verſchiedene Aufgaben aufzulöſen. Dieſe Formen können ſehr verändert werden, wenn man nach der Reihe immer drey verſchiedene, doch von einander unabhängige, Gegebene nimmt. Die fünf Tafeln (160 bis 164) löſen die fünf Hauptprobleme der Trigonometrie in einer gröſseren

Allgemeinheit wie gewöhnlich auf, und man kann die Grundtafel, oder jede abgeleitete, als folgende allgemeine Aufgabe in Gleichung gesetzt, betrachten, nämlich: wenn von den 37 in der Tafel aufgezählten Dingen 3 von einander unabhängige gegeben sind, die 34 übrigen zu finden. In dieser Aufgabe ist die gewöhnliche Trigonometrie wie ein besonderer Fall enthalten. In der folgenden, nur eine neue Ausdehnung der vorigen, werden wir die Zahl der in der Tafel aufgerechneten Quantitäten bis auf 101 bringen.

## Sechszehnte Aufgabe.

167. Es sind in einem Dreyecke 2 Winkel und der Halbmesser des umschriebenen Kreises gegeben, man sucht 1) den dritten Winkel und die drey Seiten, 2) die Perpendikel aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten, 3) die Linien, welche die Füsse dieser Perpendikel verbinden, 4) die Segmente auf allen diesen Linien bis zu ihrem Zusammenstossen verlängert, die dadurch gebildeten Winkel, den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, den Umfang und den Flächeninhalt des vorgegebenen Dreyecks.

Das Dreyeck sey $ABC$ (*Fig.* 48.), die Winkel spitzig, $A$ der gröste, $B$ der kleinste; $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ seyen die Perpendikel aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten, $\overline{FGL}$, $\overline{HFM}$, $\overline{HGN}$ die Linien, welche die Füsse der Perpendikel verbinden,

$l$, $m$, $n$ die Punkte, wo ſie die Perpendikel treffen, $L$, $M$, $N$ die, wo dieſelben Linien verlängert, die gegenüberſtehenden auch verlängerten Seiten treffen.

Alle Theile dieſer Figur ſollen alſo in Werthen der drey gegebenen gefunden werden.

Der dritte Winkel iſt das Supplement der Summe der beyden andern. Ich ſetze ihn alſo in die Formeln, um ſie ſymmetriſch in Hinſicht auf dieſe drey Winkel zu machen. Auch kann man ſo leicht, welchen man will, eliminiren, indem man an ſeine Stelle $2\pi -$ der Summe der beyden andern ſetzt.

Es ſind 9 Linien in dieſem Syſteme gezogen, auf jeder 4 Theilungspunkte, alſo 6 Segmente, wenn man die Linie ſelbſt mit rechnet, ſo kommen 54 Lineär-Quantitäten in Betracht, und mit dem Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes u. ſ. w. 57.

Dieſe Linien, zwey und zwey genommen, bilden einen Winkel, alſo im Ganzen $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$. Dazu noch 8 Flächen der Dreyecke, giebt 101 Quantitäten.

Um Brüche zu vermeiden, habe ich für $\frac{1}{cos}$ die Secante, und für $\frac{1}{sin}$ die Coſecante geſetzt.

## Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}C = A$.
2) $A\hat{B}C = B$.
3) $A\hat{C}B = C$.
4) $A\hat{B}D = \pi - A$.
5) $A\hat{C}D = \pi - A$.

6) $B\hat{A}D$

6) $B\hat{A}D = \pi - B.$
7) $B\hat{C}D = \pi - B.$
8) $C\hat{A}D = \pi - C.$
9) $C\hat{B}D = \pi - C.$
10) $B\hat{D}C = 2\pi - A.$
11) $C\hat{D}A = 2\pi - B.$
12) $A\hat{D}B = 2\pi - C.$
13) $B\hat{D}F = A.$
14) $C\hat{D}H = B.$
15) $A\hat{D}G = C.$
16) $B\hat{H}F = A.$
17) $B\hat{F}H = C.$
18) $C\hat{G}H = B.$
19) $C\hat{H}G = A.$
20) $A\hat{F}G = C.$
21) $A\hat{G}F = B.$
22) $D\hat{H}F = \pi - A.$
23) $D\hat{H}G = \pi - A.$
24) $D\hat{G}H = \pi - B.$
25) $D\hat{G}F = \pi - B.$
26) $D\hat{F}G = \pi - C.$
27) $D\hat{F}H = \pi - C.$
28) $F\hat{H}G = 2\pi - 2A.$
29) $F\hat{G}H = 2\pi - 2B.$
30) $G\hat{F}H = 2\pi - 2C.$
31) $A\hat{l}F = \pi - (C - B).$
32) $BmH = \pi - (A - C).$
33) $C\hat{n}G = \pi - (A - B).$
34) $A\hat{M}H = A - C.$
35) $B\hat{N}G = A - B.$
36) $C\hat{L}F = C - B.$

37) $\overline{BC} = 2R \cdot \sin A.$

38) $\overline{AC} = 2R \cdot \sin B.$

39) $\overline{AB} = 2R \cdot \sin C.$

40) $\overline{AD} = 2R \cdot \cos A.$

41) $\overline{BD} = 2R \cdot \cos B.$

42) $\overline{CD} = 2R \cdot \cos C.$

43) $\overline{AH} = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C.$

44) $\overline{BG} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin C.$

45) $\overline{CF} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin B.$

46) $\overline{DH} = 2R \cdot \cos B \cdot \cos C.$

47) $\overline{DG} = 2R \cdot \cos A \cdot \cos C.$

48) $\overline{DF} = 2R \cdot \cos A \cdot \cos B.$

49) $\overline{FG} = 2R \cdot \sin A \cdot \cos A.$

50) $\overline{AF} = 2R \cdot \sin B \cdot \cos B.$

51) $\overline{GH} = 2R \cdot \sin C \cdot \cos C.$

52) $\overline{AF} = 2R \cdot \sin B \cdot \cos A.$

53) $\overline{AG} = 2R \cdot \sin C \cdot \cos A.$

54) $\overline{BF} = 2R \cdot \sin A \cdot \cos B.$

55) $\overline{BH} = 2R \cdot \sin C \cdot \cos B.$

56) $\overline{CG} = 2R \cdot \sin A \cdot \cos C.$

57) $\overline{CH} = 2R \cdot \sin B \cdot \cos C.$

58) $\overline{Al} = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos A \cdot \sec(C-B).$

59) $\overline{Bm} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin C \cdot \cos B \cdot \sec(A-C).$

60) $\overline{Cn} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C \cdot \sec(A-B).$

61) $\overline{Dl} = 2R \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \sec(C-B).$

62) $\overline{Dm} = 2R \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \sec(A-C).$

63) $\overline{Dn} = 2R \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \sec(A-B).$

64) $\overline{Fl} = 2R \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \cos A \cdot \sec(C-B).$

65) $\overline{Gl} = 2R \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot \cos A \cdot \sec(C-B).$

66) $\overline{Hm} = 2R \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot \cos B \cdot \sec(A-C).$

67) $\overline{Fm} = 2R \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \sec(A - C)$.
68) $Gn = 2R \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \cos C \cdot \sec(A - B)$.
69) $\overline{Hn} = 2R \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \sec(A - B)$.
70) $\overline{lB} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin C \cdot \cos B \cdot \operatorname{cosec}(C - B)$.
71) $\overline{LC} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C \cdot \operatorname{cosec}(C - B)$.
72) $\overline{LH} = R \cdot \sin 2B \cdot \sin 2C \cdot \operatorname{cosec}(C - B)$.
73) $\overline{LF} = R \cdot \sin A \cdot \sin 2B \cdot \operatorname{cosec}(C - B)$.
74) $\overline{LG} = R \cdot \sin A \cdot \sin 2C \cdot \operatorname{cosec}(C - B)$.
75) $\overline{Ll} = 2R \cdot \sin 2B \cdot \sin 2C \cdot \operatorname{cosec}(2C - 2B)$.
76) $\overline{MA} = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec}(A - C)$.
77) $\overline{MC} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C \cdot \operatorname{cosec}(A - C)$.
78) $\overline{MG} = R \cdot \sin 2A \cdot \sin 2C \cdot \operatorname{cosec}(A - C)$.
79) $\overline{MF} = R \cdot \sin B \cdot \sin 2A \cdot \operatorname{cosec}(A - C)$.
80) $\overline{MH} = R \cdot \sin B \cdot \sin 2C \cdot \operatorname{cosec}(A - C)$.
81) $\overline{Mm} = 2R \cdot \sin 2A \cdot \sin 2C \cdot \operatorname{cosec}(2A - 2C)$.
82) $\overline{NB} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin C \cdot \cos B \cdot \operatorname{cosec}(A - B)$.
83) $\overline{NA} = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos A \cdot \operatorname{cosec}(A - B)$.
84) $\overline{NF} = R \cdot \sin 2A \cdot \sin 2B \cdot \operatorname{cosec}(A - B)$.
85) $\overline{NH} = R \cdot \sin C \cdot \sin 2B \cdot \operatorname{cosec}(A - B)$.
86) $\overline{NG} = R \cdot \sin C \cdot \sin 2A \cdot \operatorname{cosec}(A - B)$.
87) $\overline{Nn} = 2R \cdot \sin 2A \cdot \sin 2B \cdot \operatorname{cosec}(2A - 2B)$.
88) $\overline{lH} = R \cdot \sin 2B \cdot \sin 2C \cdot \sec(C - B)$.
89) $\overline{mG} = R \cdot \sin 2A \cdot \sin 2C \cdot \sec(A - C)$.
90) $\overline{nF} = R \cdot \sin 2A \cdot \sin 2B \cdot \sec(A - B)$.
91) $R = R$.
92) $r = R \cdot (\cos A + \cos B + \cos C - 1)$.
93) $P = 2R \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$.

### Werthe der Flächen.

94) $S = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.
95) $\overline{ADB} = 2R^2 \cdot \sin C \cdot \cos A \cdot \cos B$.

96) $\overline{\overline{ADC}} = 2R^2 . \sin C . \cos A . \cos C.$

97) $\overline{\overline{BDC}} = 2R^2 . \sin A . \cos B . \cos C.$

98) $\overline{\overline{FDH}} = R^2 . \sin 2B . \cos A . \cos B . \cos C.$

99) $\overline{\overline{GDH}} = R^2 . \sin 2C . \cos A . \cos B . \cos C.$

100) $\overline{\overline{FDG}} = R^2 . \sin 2A . \cos A . \cos B . \cos C.$

101) $\overline{\overline{FGH}} = \frac{1}{2}R^2 . \sin 2A . \sin 2B . \sin 2C.$

Die Berechnung der Flächen beruht auf dem Satze, dafs die Fläche jedes Dreyecks dem Produkte zweyer Seiten in den Sinus des eingefchloffenen Winkels gleich ift. Wegen $r$ vergleiche man (137).

Würde $A$ ftumpf, fo werden die Quantitäten $\pi - A$, $2\pi - 2A$, $\cos A . \sec A . \sin 2A$ invers. In den zweyten Gliedern ift nichts zu verändern, weil weder $A$, noch $B$, noch $C$, noch $R$ durch o oder durch $\infty$ gegangen find. Man ficht die Folgen leicht, wenn $B$ oder $C$ ftumpf würde.

Eben fo, wenn $B = C$, fo würde $C - B$ invers. Daraus find die Veränderungen der Zeichen in den erften Gliedern leicht zu beurtheilen. $C\hat{L}F$ würde —, fo wie $\overline{AI}$, $\overline{DI}$ u. f. w.

168. Aus diefer Tafel folgt die Auflöfung der allgemeinen Aufgabe:

Wenn drey von einander unabhängige Quantitäten aus den 101 in der Tafel enthaltenen gegeben find, die 98 unbekannten zu finden.

Man fucht dann nur $A$, $B$, $C$, $R$ in Werthen der neuen Gegebenen und fetzt fie in alle Formeln der Tafel.

## Siebenzehnte Aufgabe.

169. Das Dreyeck $ABC$ (*Fig.* 49.) iſt in einem Kreiſe beſchrieben, aus jedem Winkel laſſe man einen Perpendikel auf die gegenüberſtehende Seite, und verlängere es bis an den Umkreis, ſo entſtehen, mit den Scheitelpunkten des Dreyecks, 6 Durchſchnittspunkte auf dieſem Umkreiſe, $A$, $B$, $C$, $f$, $g$, $h$. Nun verbinde man dieſe Punkte zwey und zwey durch eine Sehne, ſo verlangt man 1) den Werth dieſer Sehnen, 2) den Werth der Winkel, den dieſe Sehnen zwey und zwey an den Durchſchnittspunkten bilden, alles in Werthen derſelben Quantitäten $A$, $B$, $C$, $R$ ausgedrückt, die ſchon in der vorigen Ausgabe gebraucht wurden.

Man ſieht leicht, daſs dieſe neue Aufgabe nur eine Ausdehnung der vorigen iſt. Ich füge alſo die neuen Quantitäten hinzu, indem ich die Zahlen der vorigen Tafel fortſetze.

Werthe der Winkel.

102) $f\hat{A}B = \pi - B.$

103) $f\hat{A}h = 2\pi - 2B.$

104) $f\hat{A}C = \pi + (A - B).$

105) $f\hat{A}g = 2A.$

106) $B\hat{A}g = \pi + (A - C).$

107) $h\hat{A}g = 2\pi - 2C.$

108) $C\hat{A}g = \pi - C.$

109) $h\hat{B}C = \pi - C.$

110) $h\hat{B}g = 2\pi - 2C.$

111) $h\hat{B}A = \pi - (C - B).$

112) $h\hat{B}f = 2B.$

113) $C\hat{B}f = \pi - (A - B).$

114) $g\hat{B}F = 2\pi - 2A.$

115) $A\hat{B}f = \pi - A.$

116) $g\hat{C}A = \pi - A.$

117) $g\hat{C}f = 2\pi - 2A.$

118) $g\hat{C}B = \pi - (A - C).$

119) $g\hat{C}h = 2C.$

120) $A\hat{C}h = \pi + (C - B).$

121) $f\hat{C}h = 2\pi - 2B.$

122) $B\hat{C}h = \pi - B.$

123) $A\hat{f}g = \pi - A.$

124) $A\hat{f}C = B.$

125) $A\hat{f}h = \pi - (C - B).$

126) $A\hat{f}B = 2\pi - C.$

127) $g\hat{f}C = \pi - C.$

128) $g\hat{f}h = 2\pi - 2C.$

129) $g\hat{f}B = \pi + (A - C).$

130) $C\hat{f}h = \pi - C.$

131) $C\hat{f}B = A.$

132) $h\hat{f}B = \pi - B.$

133) $B\hat{h}f = \pi - B.$

134) $B\hat{h}A = C.$

135) $B\hat{h}g = \pi - (A - C).$

136) $B\hat{h}C = 2\pi - A.$

137) $f\hat{h}A = \pi - A.$

138) $f\hat{h}g = 2\pi - 2A.$

139) $f\hat{h}C = \pi - (A - B).$

140) $A\hat{h}g = \pi - A.$

141) $A\hat{h}C = B.$
142) $g\hat{h}C = \pi - C.$
143) $C\hat{g}h = \pi - C.$
144) $C\hat{g}B = A.$
145) $C\hat{g}f = \pi + (A - B).$
146) $C\hat{g}A = 2\pi - B.$
147) $h\hat{g}B = \pi - B.$
148) $h\hat{g}f = 2\pi - 2B.$
149) $h\hat{g}A = \pi + (C - B).$
150) $B\hat{g}f = \pi - B.$
151) $B\hat{g}A = C.$
152) $f\hat{g}A = \pi - A.$

Werthe der Linien.

153) $\overline{Af} = 2R \cdot \cos A.$
154) $\overline{Ah} = 2R \cdot \cos(C - B).$
155) $\overline{Ag} = 2R \cdot \cos A.$
156) $\overline{Bh} = 2R \cdot \cos B.$
157) $\overline{Bg} = 2R \cdot \cos(A - C).$
158) $\overline{Bf} = 2R \cdot \cos B.$
159) $\overline{Cg} = 2R \cdot \cos C.$
160) $\overline{Cf} = 2R \cdot \cos(A - B).$
161) $\overline{Ch} = 2R \cdot \cos C.$
162) $\overline{fg} = 2R \cdot \sin 2A.$
163) $\overline{gh} = 2R \cdot \sin 2C.$
164) $\overline{fh} = 2R \cdot \sin 2B.$

Das jetzt aufgelöste Problem ist nur eine Folge des vorigen, man muss also dieselben Betrachtungen darauf anwenden.

## Achtzehnte Aufgabe.

170. Das Dreyeck $ABC$ ist in einem Kreise beschrieben (*Fig.* 50.). Wir wollen annehmen, dass man aus jedem Winkel an den Mittelpunkt des Kreises eine Linie ziehe, und dass man diese Linie bis an den Umkreis verlängere, so entstehen darauf, wenn man die drey Scheitelpunkte des Dreyecks mitrechnet, sechs Durchschnittspunkte $A$, $B$, $C$, $f'$, $g'$, $h'$. Man verbinde diese sechs Durchschnittspunkte zwey und zwey mit einer Sehne, dann wird verlangt, 1) der Werth jeder dieser Chorden, 2) der Werth jedes Winkels, den diese Sehnen an den Durchschnittspunkten machen, alles in Werthen von $A$, $B$, $C$, $R$ wie in den vorigen Aufgaben ausgedrückt.

Man sieht gleich, dass diese neue Aufgabe nur eine Folge der beyden vorigen ist und man nur die zu dem System hinzugekommenen Quantitäten wie $\overline{Af'}$, $\overline{Ah'}$, $\overline{Ag'}$, $\overline{Bf'}$ u. s. w. in den bekannten Werthen auszudrücken braucht. Ich werde also nur die Zahlen der Formeln fortsetzen.

Die neue Tafel wird 69 neue Quantitäten enthalten, 12 Sehnen und 57 Winkel. An jedem der 6 Durchschnittspunkte entstehen nämlich 10, davon muss man aber die 3 Winkel des Dreyecks abrechnen.

Werthe der Winkel.

165) $f'\hat{A}B = \pi - A.$
166) $f'\hat{A}h' = B.$
167) $f'\hat{A}C = \pi.$
168) $f'\hat{A}g' = 2\pi - A.$
169) $B\hat{A}h' = \pi - C.$
170) $B\hat{A}g' = \pi.$
171) $h'\hat{A}C = \pi - B.$
172) $h'\hat{A}g' = C.$
173) $C\hat{A}g' = \pi - A.$
174) $h'\hat{B}C = \pi - B.$
175) $h'\hat{B}g' = C.$
176) $h'\hat{B}A = \pi.$
177) $h'\hat{B}f' = 2\pi - B.$
178) $C\hat{B}g' = \pi - A.$
179) $C\hat{B}f' = \pi.$
180) $g'\hat{B}A = \pi - C.$
181) $g'\hat{B}f' = A.$
182) $A\hat{B}f' = \pi - B.$
183) $g'\hat{C}A = \pi - C.$
184) $g'\hat{C}f' = A.$
185) $g'\hat{C}B = \pi.$
186) $g'\hat{C}h' = 2\pi - C.$
187) $A\hat{C}f' = \pi - B.$
188) $A\hat{C}h' = \pi.$
189) $f'\hat{C}B = \pi - A.$
190) $f'\hat{C}h' = B.$
191) $B\hat{C}h' = \pi - C.$
192) $Af'\hat{g}' = \pi - C.$
193) $Af'\hat{C} = B.$
194) $Af'\hat{h}' = \pi.$

195) $Af'\hat{B} = 2\pi - C.$
196) $g'\hat{f}'C = \pi - A.$
197) $g'\hat{f}'h' = C.$
198) $g'\hat{f}'B = \pi.$
199) $Cf'\hat{h}' = \pi - B.$
200) $Cf'\hat{B} = A.$
201) $h'f'\hat{B} = \pi - C.$
202) $Bh'\hat{f}' = \pi - A.$
203) $Bh'\hat{A} = C.$
204) $Bh'\hat{g}' = \pi.$
205) $Bh'\hat{C} = 2\pi - A.$
206) $f'h'\hat{A} = \pi - B.$
207) $f'h'\hat{g}' = A.$
208) $f'h'\hat{C} = \pi.$
209) $Ah'\hat{g}' = \pi - C.$
210) $Ah'\hat{C} = B.$
211) $g'h'\hat{C} = \pi - A.$
212) $Cg'\hat{h}' = \pi - B.$
213) $Cg'\hat{B} = A.$
214) $Cg'\hat{f}' = \pi.$
215) $Cg'\hat{A} = 2\pi - B.$
216) $h'g'\hat{B} = \pi - C.$
217) $h'g'\hat{f}' = B.$
218) $h'g'\hat{A} = \pi.$
219) $Bg'\hat{f}' = \pi - A.$
220) $Bg'\hat{A} = C.$
221) $f'g'\hat{A} = \pi - B.$

## Werthe der Linien.

222) $\overline{Af'} = 2R \cdot \cos B.$
223) $\overline{Ah'} = 2R.$

224) $\overline{Ag'} = 2R \cdot \cos C.$

225) $\overline{Bh'} = 2R \cdot \cos C.$

226) $\overline{Bg'} = 2R.$

227) $\overline{Bf'} = 2R \cdot \cos A.$

228) $\overline{Cg'} = 2R \cdot \cos A.$

229) $\overline{Cf'} = 2R.$

230) $\overline{Ch'} = 2R \cdot \cos B.$

231) $\overline{f'g'} = 2R \cdot \sin A.$

232) $\overline{g'h'} = 2R \cdot \sin C.$

233) $\overline{f'h'} = 2R \cdot \sin B.$

Es bedarf kaum der Erinnerung, dafs man hier die Betrachtungen 163 fg. wiederholen mufs.

## Neunzehnte Aufgabe.

171. Das Dreyeck $ABC$ ift in einem Kreife befchrieben (*Fig.* 51.), aus jedem Winkel zieht man eine Linie, die ihn halbirt, bis an die Peripherie, auf der alfo die Durchfchnittspunkte $A$, $B$, $C$, $f''$, $g''$, $h''$ entftehen. Man verbinde diefe Punkte durch Sehnen, fo verlangt man 1) den Werth jeder Sehne, 2) den Werth jedes der Winkel, die durch diefe Sehnen an den fechs Durchfchnittspunkten gebildet find, alles in Werthen derfelben Quantitäten, $A$, $B$, $C$, $R$, ausgedrückt, die fchon in den vorigen Aufgaben vorkamen.

Man fieht leicht, dafs diefe neue Aufgabe nur eine Folge der beyden vorhergehenden ift, und dafs man nur die zum Syftem hinzugekommenen Quan-

titäten, als $\overline{Af''}$, $\overline{Ah''}$ u. s. w. auf die verlangte Art auszudrücken braucht. Ich fahre also mit Nr. 234 fort. Hier werden 57 neue Winkel und 12 neue Linien vorkommen.

### Werthe der Winkel.

234) $f''\hat{A}B = \frac{1}{2}C.$

235) $f''\hat{A}h'' = \pi - \frac{1}{2}B.$

236) $f''\hat{A}C = \pi + \frac{1}{2}(A-B).$

237) $f''\hat{A}g'' = \pi + \frac{1}{2}A.$

238) $B\hat{A}h'' = \frac{1}{2}A.$

239) $B\hat{A}g'' = \pi + \frac{1}{2}(A-C).$

240) $h''\hat{A}C = \frac{1}{2}A.$

241) $h''\hat{A}g'' = \pi - \frac{1}{2}C.$

242) $C\hat{A}g'' = \frac{1}{2}B.$

243) $h''\hat{B}C = \frac{1}{2}A.$

244) $h''\hat{B}g'' = \pi - \frac{1}{2}C.$

245) $h''\hat{B}A = \pi - \frac{1}{2}(C-B).$

246) $h''\hat{B}f'' = \pi + \frac{1}{2}B.$

247) $C\hat{B}g'' = \frac{1}{2}B.$

248) $C\hat{B}f'' = \pi - \frac{1}{2}(A-B).$

249) $g''\hat{B}A = \frac{1}{2}B.$

250) $g''\hat{B}f'' = \pi - \frac{1}{2}A.$

251) $A\hat{B}f'' = \frac{1}{2}C.$

252) $g''\hat{C}A = \frac{1}{2}B.$

253) $g''\hat{C}f'' = \pi - \frac{1}{2}A.$

254) $g''\hat{C}B = \pi - \frac{1}{2}(A-C).$

255) $g''\hat{C}h'' = \pi + \frac{1}{2}C.$

256) $A\hat{C}f'' = \frac{1}{2}C.$

257) $A\hat{C}h'' = \pi + \frac{1}{2}(C-B).$

258) $f''\hat{C}B = \frac{1}{2}C.$

259) $f''\hat{C}h'' = \pi - \frac{1}{2}B.$

260) $B\hat{C}h'' = \frac{1}{2}A.$

261) $Af''\hat{g}'' = \frac{1}{2}B.$

262) $Af''\hat{C} = B.$

263) $Af''\hat{h}'' = \pi - \frac{1}{2}(C - B).$

264) $Af''\hat{B} = 2\pi - C.$

265) $g''\hat{f}''C = \frac{1}{2}B.$

266) $g''\hat{f}''h'' = \pi - \frac{1}{2}C.$

267) $g''\hat{f}''B = \pi + \frac{1}{2}(A - C).$

268) $Cf''\hat{h}'' = \frac{1}{2}A.$

269) $Cf''\hat{B} = A.$

270) $h''\hat{f}''B = \frac{1}{2}A.$

271) $Bh''\hat{f}'' = \frac{1}{2}C.$

272) $Bh''\hat{A} = C.$

273) $Bh''\hat{g}'' = \pi - \frac{1}{2}(A - C).$

274) $Bh''\hat{C} = 2\pi - A.$

275) $f''\hat{h}''A = \frac{1}{2}C.$

276) $f''\hat{h}''g'' = \pi - \frac{1}{2}A.$

277) $f''\hat{h}''C = \pi - \frac{1}{2}(A - B).$

278) $Ah''\hat{g}'' = \frac{1}{2}B.$

279) $Ah''\hat{C} = B.$

280) $g''\hat{h}''C = \frac{1}{2}B.$

281) $Cg''\hat{h}'' = \frac{1}{2}A.$

282) $Cg''\hat{B} = A.$

283) $Cg''\hat{f}'' = \pi + \frac{1}{2}(A - B).$

284) $Cg''\hat{A} = 2\pi - B.$

285) $h''\hat{g}''B = \frac{1}{2}A.$

286) $h''\hat{g}''f'' = \pi - \frac{1}{2}B.$

287) $h''\hat{g}''A = \pi + \frac{1}{2}(C - B).$

288) $Bg''\hat{f}'' = \frac{1}{2}C.$

289) $B\hat{g}''A = C.$

290) $f''\hat{g}''A = \frac{1}{2}C.$

Werthe der Linien.

291) $\overline{Af''} = 2R \cdot \sin\frac{1}{2}C.$

292) $\overline{Ah''} = 2R \cdot \cos\frac{1}{2}(C-B).$

293) $\overline{Ag''} = 2R \cdot \sin\frac{1}{2}B.$

294) $\overline{Bh''} = 2R \cdot \sin\frac{1}{2}A.$

295) $\overline{Bg''} = 2R \cdot \cos\frac{1}{2}(A-C).$

296) $\overline{Bf''} = 2R \cdot \sin\frac{1}{2}C.$

297) $\overline{Cg''} = 2R \cdot \sin\frac{1}{2}B.$

298) $\overline{Cf''} = 2R \cdot \cos\frac{1}{2}(A-B).$

299) $\overline{Ch''} = 2R \cdot \sin\frac{1}{2}A.$

300) $\overline{f''g''} = 2R \cdot \cos\frac{1}{2}A.$

301) $\overline{g''h''} = 2R \cdot \cos\frac{1}{2}C.$

302) $\overline{f''h''} = 2R \cdot \cos\frac{1}{2}B.$

172. Die vier letzten Aufgaben machen nur eine grofse allgemeine Aufgabe aus, nämlich diese:

Wenn in einem Dreyeck von den 302 eben aufgezählten Dingen irgend 3, die aber von einander unabhängig seyn müssen, gegeben sind, die 299 unbekannten zu finden.

Die Auflösung ist aus dem vorigen bekannt, nur mufs man noch bemerken, dafs die Veränderungen der Zeichen, die eintreten müssen, wenn das Syftem, worauf sie sich beziehen, sich verändert, gleich aus der im vorigen Capitel entwickelten Theorie der Lineo-angulär-Quantitäten gefunden wird. Man sieht daraus gleich, dafs, weil keine von den Quan-

titäten $A$, $B$, $C$, $R$, aus denen die zweyten Glieder beſtehen, weder durch o, noch durch $\infty$ geht, in dieſen zweyten Gliedern nichts zu ändern iſt. Aber aus der Natur dieſer Winkel ſieht man, welche unter den erſten Gliedern das Zeichen — annehmen müſſen, damit die Formeln der allgemeinen Tafel auf die verſchiedenen Hypotheſen anwendbar werden, ohne daſs es nöthig ſey, deswegen eine neue Tafel der Correlation zu bilden.

173. Stellt man ſich die vier Figuren (48, 49, 50, 51), die zu den vier vorhergehenden Aufgaben gehören, in eine einzige vereinigt vor (*Fig.* 52.), ſo entſtehen auf dem Umkreiſe zwölf Durchſchnittspunkte; verbindet man dieſe durch Sehnen, ſo iſt jede Sehne und jeder Winkel, den die Sehnen an den zwölf Durchſchnittspunkten bilden, aus dieſer allgemeinen Tafel bekannt.

Stellt man ſich nun dieſe Sehnen unbeſtimmt verlängert vor, ſo entſtehen daraus viele neue Durchſchnittspunkte dieſer Linien unter ſich, und folglich neue Winkel, neue Segmente auf ihnen, deren Werthe man leicht aus der vorigen Tafel finden kann.

Es ſey $ABCDE$ (*Fig.* 53.) irgend ein eingeſchriebenes Polygon, deſſen Seiten, Diagonalen, und von den Diagonalen an den Punkten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ gebildete Winkel bekannt ſind, ſo behaupte ich, daſs man leicht jeden Winkel wie $A\hat{H}C$, $A\hat{p}C$ finden kann, der nicht am Scheitelpunkte durch den Durchſchnitt dieſer Linien gebildet iſt. Eben ſo wird $\overline{EH}$, $\overline{pq}$ jedes Segment, eben dadurch innerhalb oder auſserhalb dem Kreiſe beſtimmt.

Man kennt $C\hat{E}D$, $A\hat{D}E$, alſo kennt man im Dreyecke $E\hat{p}D$ die beyden an der Grundlinie $\overline{ED}$ liegenden Winkel, der dritte $E\hat{p}D$, welcher der geſuchte Winkel iſt, iſt alſo auch bekannt. Eben ſo bey den andern.

Um das Segment $\overline{pq}$ zu haben, bemerke man nur, daſs man im Dreyecke $E\hat{p}D$ eine Seite $\overline{ED}$ und alle Winkel kennt.

174. Zieht man durch $A$ einen der Scheitelpunkte einen Durchmeſſer $AK$, ſo iſt der Winkel, den dieſer Durchmeſſer mit jeder anderen Linie des Syſtems macht, bekannt. Denn wenn man $\overline{BK}$ zieht, ſo ſieht man, daſs $A\hat{B}K = *$, folglich iſt $B\hat{A}K$ das Complement von $A\hat{K}B$. Aber $A\hat{K}B$ iſt bekannt, weil es gleich jedem Winkel wie $A\hat{D}B$, und $A\hat{D}B$ unter den gegebenen Quantitäten iſt. So findet man alle andern Winkel und Segmente auf eben dieſem Durchmeſſer.

Zieht man ferner durch $A$ eine Tangente, ſo iſt $B\hat{A}t = A\hat{D}B$. So ſind auch hier alle Winkel und Segmente bekannt.

Alle dieſe Quantitäten hätte man mit in der Tafel befaſſen können, aber um Verwirrung zu vermeiden, lieſs man ſie aus, da ſie ein jeder leicht aus den erſten Gründen der Geometrie und Trigonometrie beſtimmen kann.

175. Eben ſo leicht findet man den Inhalt eines jeden von dieſen Dreyecken; man braucht nur zwey Seiten durch den halben Sinus des eingeſchloſſenen Winkels zu multipliciren.

## Zwanzigſte Aufgabe.

176. Ein Dreyeck $ABC$ iſt in einem Kreiſe beſchrieben (*Fig.* 54.), an jedem Winkel $A$, $B$, $C$ zieht man eine Tangente des Kreiſes, und verlängert dieſe Tangenten und die Seiten des Dreyecks, bis ſie ſich ſchneiden. Nun verlangt man alle Winkel und Linien dieſer Figur in Werthen von $A$, $B$, $C$, $R$.

Die Figur enthält 42 zu betrachtende Quantitäten, 15 Winkel, durch die 6 Linien der Figur gebildet, und 27 Linien, welche durch die Durchſchnittspunkte beſtimmt werden, nämlich 3 auf jeder Seite und 6 auf jeder Tangente.

Allgemeine Tafel der Verhältniſſe zwiſchen den Seiten des eingeſchriebenen Dreyecks $ABC$, den Seiten des umſchriebenen Dreyecks $A'B'C'$, deren Berührungspunkte in die Scheitel des eingeſchriebenen Dreyecks fallen, den Winkeln, die von dieſen Linien bis zu ihrem Zuſammenſtoſsen verlängert gebildet werden, und den Segmenten, die auf ihnen durch ihre Durchſchnitte beſtimmt ſind.

### Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}C = A$.

2) $A\hat{B}C = B$.

3) $A\hat{C}B = C.$

4) $B\hat{A}'C' = 2\pi - 2A.$

5) $A'\hat{B}'C' = 2\pi - 2B.$

6) $A'\hat{C}'B' = 2\pi - 2C.$

7) $C\hat{A}''B' = C - B.$

8) $A\hat{B}''C' = A - C.$

9) $B\hat{C}''A = A - B.$

10) $C'\hat{A}B = C.$

11) $C'\hat{B}A = C.$

12) $A'\hat{B}C = A.$

13) $A'\hat{C}B = A.$

14) $B'\hat{A}C = B.$

15) $B'\hat{C}A = B.$

Werthe der Linien.

16) $\overline{AB} = 2R \cdot \sin C.$

17) $\overline{AC} = 2R \cdot \sin B.$

18) $\overline{BC} = 2R \cdot \sin A.$

19) $\overline{A'B} = 2R \cdot tang\, A.$

20) $\overline{A'C} = 2R \cdot tang\, A.$

21) $\overline{B'A} = 2R \cdot tang\, B.$

22) $\overline{B'C} = 2R \cdot tang\, B.$

23) $\overline{C'B} = 2R \cdot tang\, C.$

24) $\overline{C'A} = 2R \cdot tang\, C.$

25) $\overline{A''A} = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot cosec\,(C - B).$

26) $\overline{A''B} = 2R \cdot \sin C^2 \cdot cosec\,(C - B).$

27) $\overline{A''C} = 2R \cdot \sin B^2 \cdot cosec\,(C - B).$

28) $\overline{B''B} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin C \cdot cosec\,(A - C).$

29) $\overline{B''C} = 2R \cdot \sin A^2 \cdot \operatorname{cosec}(A - C)$.
30) $\overline{B''A} = 2R \cdot \sin C^2 \cdot \operatorname{cosec}(A - C)$.
31) $\overline{C''C} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \operatorname{cosec}(A - B)$.
32) $\overline{C''B} = 2R \cdot \sin A^2 \cdot \operatorname{cosec}(A - B)$.
33) $\overline{C''A} = 2R \cdot \sin B^2 \cdot \operatorname{cosec}(A - B)$.
34) $\overline{A''B'} = 2R \cdot \sin A \cdot \operatorname{tang} B \cdot \operatorname{cosec}(C - B)$.
35) $\overline{A''C'} = 2R \cdot \sin A \cdot \operatorname{tang} C \cdot \operatorname{cosec}(C - B)$.
36) $\overline{B'C'} = 2R \cdot (\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C)$.
37) $\overline{B''A'} = 2R \cdot \sin B \cdot \operatorname{tang} A \cdot \operatorname{cosec}(A - C)$.
38) $\overline{B''C'} = 2R \cdot \sin B \cdot \operatorname{tang} C \cdot \operatorname{cosec}(A - C)$.
39) $\overline{C'A'} = 2R \cdot (\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} C)$.
40) $\overline{C''A'} = 2R \cdot \sin C \cdot \operatorname{tang} A \cdot \operatorname{cosec}(A - B)$.
41) $\overline{C''B'} = 2R \cdot \sin C \cdot \operatorname{tang} B \cdot \operatorname{cosec}(A - B)$.
42) $\overline{A'B'} = 2R \cdot (\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B)$.

177. In dieſer Tafel nimmt man alle drey Winkel ſpitzig an, $A$ als den gröſsten, $B$ als den kleinſten. Aber man kann leicht die Veränderung der Zeichen finden, die eintreten muſs, wenn man annimmt, daſs ein Winkel wie $A$ (*Fig.* 56.) ſtumpf wird, oder wenn $B > C$ (*Fig.* 55.). Man ſieht nämlich, daſs, weil $A$, $B$, $C$, $R$, die in den zweyten Gliedern vorkommen, weder durch o, noch durch $\infty$ geht, in dieſen zweyten Gliedern keine Veränderung zu machen iſt. Aber aus der Natur dieſer Winkel ſieht man leicht, welche von den erſten Gliedern — haben müſſen.

Auch dieſe Aufgabe iſt nur eine Folge der vier vorigen, weil die darin vorkommenden Quantitäten alle in Werthen von $A$, $B$, $C$, $R$ ausgedrückt ſind.

Man muſs bemerken, daſs die drey Punkte $A''$, $B''$, $C''$ ſich nothwendigerweiſe in einer geraden Linie finden müſſen, wie man leicht ſieht.

## Ein und zwanzigſte Aufgabe.

178. Das Viereck $ABDC$ iſt in einem Kreiſe beſchrieben; man ziehe die beyden Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, und verlängere die entgegengeſetzten Seiten, bis ſie ſich in $F$, $G$ treffen. $E$ ſey der Durchſchnittspunkt der beyden Diagonalen. Nun verlangt man alle Linien und Winkel dieſer Figur, in Werthen des Radius des Cirkels ausgedrückt, und der drey Winkel $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{E}B$, welche eine Diagonale $\overline{AD}$ mit den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und der andern Diagonale $\overline{BC}$ bildet.

Es ſey

$$B\hat{A}D = m$$
$$C\hat{A}D = n$$
$$A\hat{E}C = k$$

und der Radius des Kreiſes $= R$, daraus folgt folgende Tafel.

### Allgemeine Tafel der Verhältniſſe zwiſchen allen Theilen des eingeſchriebenen Vierecks.

#### Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = m$.
2) $C\hat{A}D = n$.
3) $A\hat{E}C = k$.

4) $A\hat{E}B = 2\pi - k.$
5) $B\hat{A}C = m + n.$
6) $A\hat{B}C = k - m.$
7) $A\hat{C}B = 2\pi - (k + n).$
8) $C\hat{B}D = n.$
9) $B\hat{C}D = m.$
10) $B\hat{D}C = 2\pi - (m + n).$
11) $B\hat{D}F = m + n.$
12) $C\hat{D}G = m + n.$
13) $A\hat{D}B = 2\pi - (k + n).$
14) $A\hat{D}C = k - m.$
15) $A\hat{B}D = k + n - m.$
16) $A\hat{C}D = 2\pi - (k + n - m).$
17) $D\hat{B}F = 2\pi - (k + n - m).$
18) $D\hat{C}G = k + n - m.$
19) $A\hat{D}F = 2\pi - (k - m).$
20) $A\hat{D}G = k + n.$
21) $F\hat{B}C = 2\pi - (k - m).$
22) $G\hat{C}B = k + n.$
23) $B\hat{F}D = k - 2m.$
24) $C\hat{G}D = 2\pi - (k + 2n).$

Werthe der Linien.

25) $\overline{BC} = 2R \cdot \mathit{fin}\ (m + n).$
26) $\overline{AC} = 2R \cdot \mathit{fin}\ (k - m).$
27) $\overline{AB} = 2R \cdot \mathit{fin}\ (k + n).$
28) $\overline{AD} = 2R \cdot \mathit{fin}\ (k + n - m).$
29) $\overline{BD} = 2R \cdot \mathit{fin}\ m.$
30) $\overline{CD} = 2R \cdot \mathit{fin}\ n.$
31) $\overline{AE} = 2R \cdot \mathit{fin}\ (k + n)\ \mathit{fin}\ (k - m)\ \mathit{cofec}\ k.$
32) $\overline{BE} = 2R \cdot \mathit{fin}(k + n)\ \mathit{fin}\ m \cdot \mathit{cofec}\ k.$

33) $\overline{CE} = 2R \cdot \sin(k-m) \sin n \cdot \operatorname{cosec} k.$

34) $\overline{DE} = 2R \cdot \sin m \cdot \sin n \cdot \operatorname{cosec} k.$

35) $\overline{AF} = 2R \cdot \sin(k-m) \sin(k+n-m) \operatorname{cosec}(k-2m).$

36) $\overline{BF} = 2R \cdot \sin m \cdot \sin(m+n) \operatorname{cosec}(k-2m).$

37) $\overline{CF} = 2R \cdot \sin(k-m) \sin(m+n) \operatorname{cosec}(k-2m).$

38) $\overline{DF} = 2R \cdot \sin m \cdot \sin(k+n-m) \operatorname{cosec}(k-2m).$

39) $\overline{AG} = 2R \cdot \sin(k+n) \sin(k+n-m) \operatorname{cosec}(k+2n).$

40) $\overline{BG} = 2R \cdot \sin(k+n) \sin(m+n) \operatorname{cosec}(k+2n).$

41) $\overline{CG} = 2R \cdot \sin n \cdot \sin(m+n) \operatorname{cosec}(k+2n).$

42) $\overline{DG} = 2R \cdot \sin n \cdot \sin(k+n-m) \operatorname{cosec}(k+2n).$

43) $R = R.$

179. Die Formeln der vorigen Tafel beziehen sich nur auf die Figur, auf welche die Betrachtung gegründet war, d. h. wo die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* sich nach der Ordnung *ABDC* folgen. Will man sie nun auf den Fall anwendbar machen, wo sie sich in der Ordnung *ABCD* (*Fig.* 58.) folgten, so darf man sich nur vorstellen, dass die erste Figur durch die Bewegung des Punktes *C* auf dem Bogen *CDB*, bis er über den Punkt *D* ist, in diesen neuen Zustand komme. Dann wird offenbar *n* invers, und da das die einzige Quantität von *m*, *n*, *k*, *R* ist, die durch o gegangen ist, so braucht man nur $-n$ in die Tafel statt $+n$ zu setzen, und zu gleicher Zeit die Zeichen der ersten Glieder zu verändern, die dadurch invers geworden sind.

Ständen die Punkte in der Ordnung *ADCB* (*Fig.* 59.), so brauchte man nur eben so $-m$ zu setzen.

Diese drey Stellungen umfassen alle möglichen

Fälle, folglich kann man die Tafel auf jedes in einem Cirkel beſchriebene Vieleck anwenden.

180. Die vorige Tafel giebt alſo die Auflöſung der allgemeinen Aufgabe.

Wenn von den Quantitäten, die ein im Kreiſe beſchriebenes Viereck ausmachen, vier von einander unabhängige gegeben ſind, alle übrigen zu finden.

Z. B. man giebt die vier Seiten und verlangt das übrige.

Es ſey

$$\overline{AB} = a$$
$$\overline{AC} = b$$
$$\overline{BD} = c$$
$$\overline{CD} = d,$$

ſo geben die 26ſte, 27ſte, 29ſte und 30ſte Formel

$$b = 2R \cdot \mathit{ſin}\,(k - m)$$
$$a = 2R \cdot \mathit{ſin}\,(k + n)$$
$$c = 2R \cdot \mathit{ſin}\, m$$
$$d = 2R \cdot \mathit{ſin}\, n.$$

Man zieht alſo nur aus dieſen vier Gleichungen die Werthe von $m$, $n$, $k$, $R$, als unbekannte, und ſetzt ſie in die Formeln der Tafel. Bey der Rechnung ſelbſt kann ich mich hier um ſo weniger aufhalten, da ich noch im folgenden Abſchnitt auf eben dieſe Unterſuchung zurückkommen werde.

181. Wenn man annimmt, daſs im Viereck die zwey gegenüberſtehenden Winkel Rechte ſind, z. B. $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, ſo werden wir haben $A\hat{B}D = \pi$, oder

$k + n - m = \pi$, oder $R = \pi + (m - n)$; ſetzt man dieſen Werth von $k$ in die vorige Tafel, ſo erhält ſie dieſe Geſtalt:

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = m$.
2) $C\hat{A}D = n$.
3) $A\hat{E}C = \pi + (m - n)$.
4) $A\hat{E}D = \pi - (m - n)$.
5) $B\hat{A}C = m + n$.
6) $A\hat{B}C = \pi - n$.
7) $A\hat{C}B = \pi - m$.
8) $C\hat{B}D = n$.
9) $B\hat{C}D = m$.
10) $B\hat{D}C = 2\pi - (m + n)$.
11) $B\hat{D}F = m + n$.
12) $C\hat{D}G = m + n$.
13) $A\hat{D}B = \pi - m$.
14) $A\hat{D}C = \pi - n$.
15) $A\hat{B}D = \pi$.
16) $A\hat{C}D = \pi$.
17) $B\hat{D}F = \pi$.
18) $D\hat{C}G = \pi$.
19) $A\hat{D}F = \pi - (2m - n)$.
20) $A\hat{D}G = k + m$.
21) $F\hat{B}C = \pi - (2m - n)$.
22) $G\hat{C}B = \pi + m$.

23) $B\hat{F}D = \pi - (m+n)$.

24) $C\hat{G}D = \pi - (m+n)$.

Werthe der Linien.

25) $\overline{BC} = 2R \cdot \sin(m+n)$.

26) $\overline{AC} = 2R \cdot \cos m$.

27) $\overline{AB} = 2R \cdot \cos m$.

28) $\overline{AD} = 2R$.

29) $\overline{BD} = 2R \cdot \sin m$.

30) $\overline{DC} = 2R \cdot \sin n$.

31) $\overline{AE} = 2R \cdot \cos m \cdot \cos n \cdot \sec(m-n)$.

32) $\overline{BE} = 2R \cdot \sin m \cdot \cos m \cdot \sec(m-n)$.

33) $\overline{CE} = 2R \cdot \sin n \cdot \cos n \cdot \sec(m-n)$.

34) $\overline{DE} = 2R \cdot \sin m \cdot \sin n \cdot \sec(m-n)$.

35) $\overline{AF} = 2R \cdot \cos n \cdot \sec(m+n)$.

36) $\overline{BF} = 2R \cdot \sin m \cdot \tang(m+n)$.

37) $\overline{CF} = 2R \cdot \cos n \cdot \tang(m+n)$.

38) $\overline{DF} = 2R \cdot \sin m \cdot \sec(m+n)$.

39) $\overline{AG} = 2R \cdot \cos m \cdot \sec(m+n)$.

40) $\overline{BG} = 2R \cdot \cos m \cdot \tang(m+n)$.

41) $\overline{CG} = 2R \cdot \sin n \cdot \tang(m+n)$.

42) $\overline{DG} = 2R \cdot \sin n \cdot \sec(m+n)$.

43) $R = R$.

## Zwey und zwanzigſte Aufgabe.

182. Es ſind die vier Seiten eines Trapezes $ABDC$ (Fig. 60.) gegeben; man ſucht

1) die beyden Diagonalen und ihre Segmente, 2) die Segmente auf den gegenüberſtehenden nicht parallelen Seiten, wenn ſie bis zu ihrem Zuſammentreffen verlängert ſind, 3) alle Winkel, welche aus den Durchſchnitten dieſer Linien entſtehen.

*H* ſey der Durchſchnittspunkt beyder Diagonalen, *E* der Durchſchnittspunkt der gegenüberſtehenden nicht parallelen Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Ich ziehe durch *A*, $\overline{Am}$ parallel mit $\overline{ED}$, und durch *C*, $\overline{Cn}$ parallel mit $\overline{EB}$. Ich nehme ferner $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $\overline{AC} = c$, $\overline{BD} = d$.

Nun habe ich offenbar $\overline{Am} = b$, $\overline{Bm} = d - c$, alſo weil $\overline{Bm} : \overline{AB} = \overline{BD} : \overline{BE}$, auch $\overline{BE} = \frac{ad}{d-c}$; eben ſo $\overline{DE} = \frac{bd}{d-c}$; alſo $\overline{BE} - \overline{AB}$ oder $\overline{AE} = \frac{ac}{d-c}$; und $\overline{DE} - \overline{CD}$ oder $\overline{CE} = \frac{bc}{d-c}$.

Die Diagonalen und ihre Segmente findet man ſo. Das Dreyeck *ABD* giebt

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BD} \cdot \cos A\hat{B}D$ oder

$\overline{AD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos A\hat{B}D.$

Eben ſo giebt das Dreyeck *ABm*, $\overline{Am}^2$ oder

$b^2 = a^2 + (d-c)^2 - 2a(d-c) \cdot \cos A\hat{B}D.$

Man multiplicire die erſte Gleichung mit $d-c$, die zweyte mit $d$, und ſubtrahire dann eine von der andern, ſo erhält man

$$\overline{AD}^2 = \frac{b^2 d - a^2 c + cd(d-c)}{d-c}$$

$$\overline{BC}^2 = \frac{a^2 d - b^2 c + cd(d-c)}{d-c}.$$

Jetzt ſind nur noch die Segmente zu ſuchen. Aus den Dreyecken $BDH$, $ACD$ folgt

$\overline{BH}.\overline{CH} = \overline{BD}:\overline{AC}$ oder $\overline{BC}:\overline{BH} = \overline{BD} + \overline{AC}:\overline{BD}$,

alſo $\overline{BH} = \frac{\overline{BC}.\overline{BD}}{\overline{BD}+\overline{AC}} = \frac{d}{d+c}\, r\left(\frac{a^2 d - b^2 c + cd\,(d-c)}{d-c}\right)$.

Eben ſo

$$\overline{CH} = \frac{c}{d+c}\, r\left(\frac{a^2 d - b^2 c + cd\,(d-c)}{d-c}\right)$$

$$\overline{AH} = \frac{c}{d+c}\, r\left(\frac{b^2 d - a^2 c + cd\,.\,(d-c)}{d-c}\right)$$

$$\overline{DH} = \frac{d}{d+c}\, r\left(\frac{b^2 d - a^2 c + cd\,.\,(d-c)}{d-c}\right)$$

Wenn alle Linien ſo gefunden ſind, erhält man ohne Schwierigkeit die Winkel, aus dem bekannten Satze

$cof\, A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ u. ſ. w., wo $A$ der Winkel iſt, der $a$ gegenüber ſteht. Ich habe deswegen die Winkel in dieſer Tafel ausgelaſſen.

1) $\overline{AB} = a$.
2) $\overline{CD} = b$.
3) $\overline{AC} = c$.
4) $\overline{BD} = d$.
5) $\overline{BE} = \frac{ad}{d-c}$.
6) $\overline{DE} = \frac{bd}{d-c}$.
7) $\overline{AE} = \frac{ac}{d-c}$.
8) $\overline{CE} = \frac{bc}{d-c}$.

9) $\overline{AD} = r\left(\frac{b^2 d - a^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

10) $\overline{BC} = r\left(\frac{a^2 d - b^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

11) $\overline{BH} = \frac{d}{d+c} r\left(\frac{a^2 d - b^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

12) $\overline{CH} = \frac{c}{d+c} r\left(\frac{a^2 d - b^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

13) $\overline{AH} = \frac{c}{d+c} r\left(\frac{b^2 d - a^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

14) $\overline{DH} = \frac{d}{d+c} r\left(\frac{b^2 d - a^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

Dieſe Formeln beziehen ſich nur auf den Fall, wo $\overline{BD} > \overline{AC}$. Will man die Modifikationen beym Gegentheil wiſſen, ſo ſtelle man ſich vor, daſs $\overline{AC}$ (*Fig.* 61.) ſich durch eine allmähliche Bewegung von $A$ und $C$, auf $\overline{AC}$ ſelbſt in entgegengeſetzter Richtung, verlängere, wobey $\overline{BD}$ derſelbe bleibt, ſo wie die Entfernung von $\overline{AC}$ zu $\overline{BD}$.

Durch dieſe Bewegung wird alſo keine der vier Quantitäten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$ weder durch o, noch durch $\infty$ gehen, alſo keine invers werden. Eben ſo wenig $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{AH}$, $\overline{DH}$.

Nur $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$ ſind durch $\infty$ gegangen, und könnten wohl invers werden; das iſt denn auch in der That der Fall, denn jede von ihnen, $\overline{AE}$ z. B., hat einen Werth $\frac{ac}{d-c}$, der invers wird, weil hier $c > d$. Alſo um die gefundenen Formeln auf den Fall anwendbar zu machen, wo $\overline{AC} > \overline{BC}$, verändert man die Zeichen von $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$.

Man kann auch die Formeln, die ſich auf *Fig.* 58. beziehen, dadurch finden, daſs man ihre direkte Correlation mit der Urfigur aufſtellt.

Urſyſtem . . . . . *ABCDEH*

Umgeformtes Syſtem . *BACDEH.*

Um alſo die vorher gefundenen Formeln auf *Fig.* 58. anzuwenden, ſetzt man nur gleich für *a*, *b*, *d*, *c* die vier Quantitäten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, welche ſie vorſtellen, dann nach dieſer Correlation für jeden Punkt den ihm entſprechenden Punkt, *B* ſtatt *A* u. ſ. w., ohne die Zeichen zu verändern. In den neuen Formeln kann man dann wieder $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ u. ſ. w., *a*, *b* u. ſ. w. ſetzen.

185. Vergleicht man die Formeln zwey und zwey u. ſ. w., ſo kann man verſchiedene Folgen daraus ziehen; z. B. quadrirt man die 9te und 10te, addirt und ſubtrahirt, ſo erhält man

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + b^2 + 2bc, \quad \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = (b^2 - a^2)\frac{d+c}{d-c}.$$

Aus der erſten Gleichung folgt der Satz:

In jedem Trapeze iſt die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der nicht parallelen Seiten vermehrt mit dem doppelten Produkt der parallelen Seiten.

Wodurch der bekannte Satz von Parallelogrammen noch mehr Allgemeinheit erhält. Der zweyte giebt uns dieſe Proportion:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 : b^2 - a^2 = d + c : d - c.$$

Eben dieſe Tafel giebt die Auflöſung der allgemeinen Aufgabe:

**Wenn von den Quantitäten, aus denen ein Trapez beſteht, vier von einander unabhängige gegeben ſind, alle übrigen zu finden.**

## Drey und zwanzigſte Aufgabe.

184. **Wenn von allen Linien und Winkeln, die in einem einfachen Viereck mit ſeinen beyden Diagonalen zu betrachten ſind, fünf von einander unabhängige gegeben ſind, alle übrigen zu finden.**

*ABDC* (*Fig.* 62.) ſey das Viereck, *H* der Durchſchnittspunkt beyder Diagonalen. Bey dieſer Figur kommen 23 Dinge vor, 10 Linien und 13 Winkel, wenn man die vier Winkel, die die beyden Diagonalen machen, nur für einen rechnet. Man ſoll alſo dieſe 23 Quantitäten in Werthen von fünf unter ihnen ausdrücken, z. B. der vier Segmente auf den Diagonalen, und des Winkels, den ſie bilden. Es ſey alſo

$\overline{AH} = a.$
$\overline{BH} = b.$
$\overline{CH} = c.$
$\overline{DH} = d.$
$A\hat{H}C = k.$

Daraus entſteht folgende Tafel:

1) $\overline{AH} = a.$
2) $\overline{BH} = b.$
3) $\overline{CH} = c.$
4) $\overline{DH} = d.$
5) $A\hat{H}C = k.$
6) $\overline{AD} = a + d.$

7) $\overline{BC} = b + c.$

8) $\overline{AB} = r(a^2 + b^2 + 2ab \cdot \mathit{cof}\, k).$

9) $\overline{AC} = r(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \mathit{cof}\, k).$

10) $\overline{BD} = r(b^2 + d^2 - 2bd \cdot \mathit{cof}\, k).$

11) $\overline{CD} = r(c^2 + d^2 + 2cd \cdot \mathit{cof}\, k).$

12) $\mathit{fin}\, A\hat{B}H = \frac{a}{\mathit{fin}\, k} r(a^2 + b^2 + 2ab \cdot \mathit{cof}\, k).$

13) $\mathit{fin}\, B\hat{A}H = \frac{b}{\mathit{fin}\, k} r(a^2 + b^2 + 2ab \cdot \mathit{cof}\, k).$

14) $\mathit{fin}\, D\hat{B}H = \frac{d}{\mathit{fin}\, k} r(b^2 + d^2 - 2bd \cdot \mathit{cof}\, k).$

15) $\mathit{fin}\, B\hat{D}H = \frac{b}{\mathit{fin}\, k} r(b^2 + d^2 - 2bd \cdot \mathit{cof}\, k).$

16) $\mathit{fin}\, D\hat{C}H = \frac{d}{\mathit{fin}\, k} r(b^2 + d^2 + 2bd \cdot \mathit{cof}\, k).$

17) $\mathit{fin}\, C\hat{D}H = \frac{c}{\mathit{fin}\, k} r(b^2 + d^2 + 2bd \cdot \mathit{cof}\, k).$

18) $\mathit{fin}\, C\hat{A}H = \frac{c}{\mathit{fin}\, k} r(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \mathit{cof}\, k).$

19) $\mathit{fin}\, A\hat{C}H = \frac{c}{\mathit{fin}\, k} r(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \mathit{cof}\, k).$

20) $\mathit{cof}\, B\hat{A}C =$

$$\frac{a^2 - bc + (ab - ac) \cdot \mathit{cof}\, k}{r((a^2 + b^2 + 2ab \cdot \mathit{cof}\, k)\, a^2 + c^2 - 2ac \cdot \mathit{cof}\, k))}$$

21) $\mathit{cof}\, A\hat{B}D =$

$$\frac{b^2 - ad + (ba - bd) \cdot \mathit{cof}\, k}{r((a^2 + b^2 + 2ab \cdot \mathit{cof}\, k)\,(b^2 + d^2 - 2bd \cdot \mathit{cof}\, k))}$$

22) $\mathit{cof}\, B\hat{D}C =$

$$\frac{d^2 - bc + (dc - db) \cdot \mathit{cof}\, k}{r((b^2 + d^2 - 2bd \cdot \mathit{cof}\, k)\,(c^2 + d^2 + 2cd \cdot \mathit{cof}\, k))}$$

23) $cof\ \hat{ACD} =$

$$\frac{c^2 - ad + (cd - ca) \cdot cof k}{\sqrt{((a^2 + c^2 - 2ac \cdot cof k)(c^2 + d^2 + 2cd \cdot cof k))}}$$

Die Formeln dieſer Tafel beziehen ſich nur auf die vorgenommene Figur, d. h. wenn das Viereck heraustretende Winkel hat, und einen zuſammenhängenden Raum einſchlieſst. Aber nach der Correlationstafel (102) kann man ſie leicht auf jedes Viereck ausdehnen.

185. Die Methode, alle Verhältniſſe der Theile einer Figur durch analytiſche Formeln darzuſtellen und darauf die correlativen Figuren zu beziehen, ſcheint mir durch dieſe Beyſpiele genug entwickelt zu ſeyn. Ich bin überzeugt, daſs man groſsen Vortheil daraus ziehen kann, daſs dieſe Methode auf viele verſchiedene Figuren angewandt, das reichhaltigſte Mittel ſeyn wird, ihre Eigenſchaften zu entdecken und ſie durch ihre Analogien zu verbinden; eben ſo gewiſs wird man ſie mit glücklichem Erfolge auf andere Theile der Mathematik anwenden können.

Kurze

# Kurze Ueberſicht der Carnot'ſchen Theorie der ſogenannten negativen Quantitäten.

(Aus dem *Mémoire ſur la Relation qui exiſte entre les diſtances reſpectives de cinq points pris dans l'eſpace etc. pag.* 96.)

1. Die Natur der ſogenannten negativen Quantitäten war immer eine der hauptſächlichſten metaphyſiſchen Schwierigkeiten der Analyſis.

Jeden Augenblick führen die algebraiſchen Verrichtungen auf Ausdrücke von negativer Form. Was bedeuten ſie?

Es erhellet gleich, daſs abſolute Quantitäten die einzigen ſind, von denen man ſich einen deutlichen Begriff machen kann; die Zeichen + und —, die vor ihnen ſtehen, zeigen bloſs an ihnen vorzunehmende Verrichtungen an. So ſind die Ausdrücke $+a$, $-b$ complexe algebraiſche Formen, die weder eine Quantität, noch eine Verrichtung allein anzeigen, ſondern die Vereinigung beyder. Man kann alſo nicht, ohne der Evidenz zu ſchaden, die doch Grundlage aller mathematiſchen Wahrheiten iſt, dieſe Ausdrücke mit denen verwechſeln, die bloſse Quantitäten vorſtellen ſollen. Nun kann man aber $+a$ wie $0+a$ oder $a$ anſehen; es fällt daher jeder Unter-

ſchied zwiſchen den ſogenannten poſitiven und den abſoluten Quantitäten weg, und die Schwierigkeit betrifft eigentlich nur die ſogenannten negativen Quantitäten.

2. Einigen ſind einzelne negative Quantitäten kleiner als 0; aber dieſe Meynung ſcheint keiner Vertheidigung fähig zu ſeyn, denn um eine ſolche Quantität zu erhalten, müſste man etwas von nichts nehmen können.

Eben ſo würde $-4\times-5$ kleiner als $2\times3$ ſeyn müſſen, da bey dem erſten Produkt jeder Faktor einzeln genommen kleiner als bey dem zweyten wäre. Dennoch giebt das erſte $+20$, das zweyte nur $+6$.

Endlich, da man in jeder Rechnung alle Quantitäten, die $=0$ ſind, vernachläſsigen darf, ſo würde man mit noch gröſserem Rechte die, welche kleiner als 0 wären, nicht beachten dürfen. Aber jeder weiſs, welche grobe Fehler man durch Vernachläſsigung der negativen Quantitäten begehen würde.

3. Anderen ſind einzelne negative Quantitäten nur darin von poſitiven unterſchieden, daſs man ſie in entgegengeſetztem Sinne nehmen muſs, indeſſen ſagen ſie uns nicht, was ſie im Allgemeinen durch Quantitäten in entgegengeſetztem Sinn von einander genommen verſtehen. Sie führen freylich als Beyſpiele Schuldforderung und Schuld, Ordinaten rechts und links von der Abſciſſenaxe genommen an, aber Beyſpiele ſind keine allgemeine Erklärung. Noch dazu trügen die Regeln, welche man auf dieſem ſchwankenden Begriff erbaut hat, häufig, ſelbſt in den eben angeführten Fällen. Ein Beyſpiel ſey genug; die Secante eines Bogens, der in das dritte Viertel des Umkreiſes fällt, müſste nach den eben angeführten Regeln poſitiv ſeyn, weil ſie nach Gröſse und Richtung ganz in die Secante eines Bogens im erſten Viertel fällt. Da ſie nun aber negativ iſt, ſo

existirt, hier offenbarer Widerspruch, und diese Meynung ist eben so unzulässig wie die erste.

Noch mehr, wären die negativen Quantitäten wirkliche Quantitäten, was giebt ihnen bey der Multiplication das Vorrecht, dem Produkte ihr Zeichen zu geben? Warum kann man nicht aus beyden die Quadratwurzel ziehen? Warum soll die Quadratwurzel einer Schuldforderung, einer Ordinate rechts von der Axe genommen, eine wirkliche, die Quadratwurzel einer Schuld, einer Ordinate links von der Axe genommen, eine unmögliche Quantität seyn? Noch mehr, da man es in seiner Gewalt hat, die Seite der positiven Ordinaten zu bestimmen, so kann man nach Belieben dasselbe Ding möglich oder unmöglich machen, und durch den Zauberstab der Zeichen dem, was nicht seyn kann, Existenz geben, und das, was existirt, unmöglich machen. Gewiss, es ist den Geometern wohl nie eingefallen, dass sie so mächtig wären.

4. Andere, ohne sich über die Natur isolirter negativer Quantitäten einzulassen, haben sich damit beschäftigt, ihren Gebrauch zu rechtfertigen, und gezeigt, dass die durch sie erhaltenen Resultate immer mit denen übereinstimmen, die die Synthesis, oder Rechnungen ohne sie, liefern. Solche Arbeiten sind desto mehr zu schätzen, da es keine andere Art giebt, die Untrüglichkeit der analytischen Resultate zu beweisen. Indess ist meine Absicht hier doch verschieden; ich will nicht untersuchen, wie man den Gebrauch der sogenannten negativen Quantitäten vermeiden könne, sondern vielmehr was ihr Wesen ausmache, wenn man sie braucht.

5. Der Ausdruck negative Quantität hat in der Algebra zwey verschiedene Bedeutungen.

Nach der ersten heisst er jede mit dem Zeichen — behaftete Quantität.

Nach der andern eine Quantität, die mit einem Zeichen behaftet ist, welches dem, das sie haben sollte, entgegengesetzt ist.

Z. B. in der bekannten Formel

$cof\,(a+b) = cof\,a \,.\, cof\,b - fin\,a \,.\, fin\,b \ldots (A)$

ist das letzte Glied nach der ersten Bedeutung negativ. So lange $a$, $b$ und $a+b$ jedes für sich $< \pi$, bleibt das nämliche Glied positiv nach der zweyten Bedeutung, weil dieses Zeichen $-$, mit dem es behaftet ist, sein wahres Zeichen, das es haben muss, ist. Wird aber $a+b > \pi$, so ist die Formel falsch, und man erhält direkt durch Synthesis

$cof\,(a+b) = fin\,a \,,\, fin\,b - cof\,a \,.\, cof\,b \ldots (B)$.

Soll also die erste Formel noch auf diesen Fall anwendbar seyn, so muss man das erste Glied $cof\,(a+b)$ so ansehen, als sey es mit einem Zeichen behaftet, das dem, welches es haben sollte, entgegengesetzt ist, weil man in der That durch Verwechselung des Zeichens dieses Gliedes

$-cof\,(a+b) = cof\,a \,.\, cof\,b - fin\,a \,.\, fin\,b$,

also eine Formel erhält, woraus durch Versetzung der Glieder $(B)$ wird. Will man also $(A)$, auch als auf den Fall, wo $a+b > \pi$ anwendbar, betrachten, so ist $cof\,(a+b)$ dann mit einem Zeichen behaftet, das dem, welches er haben sollte, entgegengesetzt ist, und folglich eine negative Quantität nach der zweyten Bedeutung, obgleich er positiv nach der ersten ist.

Hieraus kann man den wesentlichen Unterschied beyder sehen. Dieselbe Quantität kann positiv nach der ersten, negativ nach der zweyten Bedeutung seyn, oder umgekehrt. Eine einfache Versetzung macht die positiv, die nach der ersten Bedeutung negativ war, dahingegen sie auch durch Versetzung immer negativ nach der zweyten Bedeutung bleibt, weil sie darum doch das Zeichen behält, das dem,

welches ſie haben ſollte, entgegengeſetzt iſt. Iſt es wohl ein Wunder, wenn derſelbe Ausdruck, für zwey ſo verſchiedene Dinge gebraucht, Dunkelheit verurſacht?

6. Um dieſe Unbequemlichkeit zu vermeiden, wollen wir den Ausdruck negative Quantitäten nur für die mit — behafteten brauchen, und die, welche ein Zeichen haben, das dem, welches ſie haben ſollten, entgegengeſetzt iſt, inverſe Quantitäten, im Gegenſatz direkter Quantitäten, nennen. Direkte ſind nämlich, die das Zeichen, das ſie haben ſollen, haben.

Man ſagt z. B., eine Schuld ſey eine negative Schuldforderung, das heiſst nun, wenn man in einer Rechnung eine für die andere nimmt, ſo wird die algebraiſche Quantität, die die zu bezahlende oder zu empfangende Summe vorſtellt, ein dem Zeichen, welches ſie eigentlich haben ſollte, entgegengeſetztes haben.

Es ſey $x$ die Quantität, die eine gewiſſe Perſon bezahlen oder empfangen ſoll, $A$ das Vermögen dieſer Perſon, $B$ das, was ſie, ohne $x$ zu rechnen, beſitzt. Iſt nun $x$ eine Schuldforderung, ſo hat man

$$A = B + x, \quad \text{oder } x = A - B,$$

iſt im Gegentheil $x$ eine Schuld, ſo hat man

$$A = B - x, \quad \text{oder } x = B - A.$$

Wenn man alſo in einer Rechnung $x$ irriger Weiſe für eine Schuldforderung angenommen hätte, da es nur eine Schuld war, ſo hat man in die Rechnung $A - B$ ſtatt $B - A$, oder $A - B$ ſtatt $-(A - B)$, oder $x$ ſtatt $-x$ geſetzt, d. h. im Verlauf der Rechnung wird $x$ ein Zeichen haben, das dem entgegengeſetzt iſt, welches $x$ haben ſollte, und welches $x$ haben würde, wenn es wirklich das, was es vorſtellen ſollte, vorſtellt.

7. Derſelbe Fall tritt bey der Anwendung der Algebra auf die Geometrie ein, wenn man z. B. eine Ordinate, die links von der Abſciſſenaxe liegt, als rechts gelegen annimmt, wo der Buchſtabe, durch den ſie angezeigt wird, ein Zeichen bekommt, das dem entgegengeſetzt iſt, das er eigentlich haben ſollte, und das er haben würde, wenn kein Irrthum in Anſehung der Stellung vorgefallen wäre. So wird dieſer Buchſtabe eine inverſe Quantität ausdrücken.

8. Daraus erhellet, daſs der höchſte Grundſatz in der Theorie inverſer Quantitäten dieſer iſt:

Jede inverſe Quantität kann als der Unterſchied zweyer direkten angeſehen werden, wo man die gröſsere für die kleinere genommen hat, und umgekehrt.

So iſt im vorigen Beyſpiel $x$ invers, weil man es als $A - B$ angenommen hat, da es eigentlich $B - A$ iſt, d. h. weil von den beyden Quantitäten $A$, $B$, deren Unterſchied $x$ iſt, $A \geqq B$ angenommen iſt, da es in der That kleiner iſt.

Ueberhaupt ſey $p$ irgend eine inverſe Quantität, die wir $= m - n$ annehmen. Weil nach der Hypotheſe $p$ invers iſt, ſo iſt es mit einem Zeichen behaftet, das dem, welches es eigentlich haben ſollte, entgegengeſetzt iſt; d. h. man hat in die Rechnung $p$ ſtatt $-p$ geſetzt, oder $m - n$ ſtatt $n - m$; man hat alſo $m \geqq n$ angenommen, da in der That $n \leqq m$.

9. In dem Sinne muſs man auch den wichtigen und bekannten Grundſatz verſtehen, daſs jede Veränderliche, die vom Poſitiven zum Negativen übergeht, nothwendig durch o oder durch $\infty$ gehen muſs. Er ſagt nur, daſs jede Veränderliche, die vom direkten Zuſtande zum inverſen übergeht, oder umgekehrt, nothwendig durch o oder durch $\infty$ gehen muſs. Soll nämlich von zwey Quantitäten $m$, $n$ die

gröſsere zur kleineren werden, ſo müſſen beyde durch den Zuſtand der Gleichheit gehen, wo dann $m - n$ oder $n - m = 0$. Eben ſo geht $p$ in $-p$ über, ſo wird auch aus $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{-p}$, alſo wird $\frac{1}{-p}$ auch invers, und geht durch $\infty$ in dem Augenblicke, da $p = 0$.

Wir wollen dieſe ganze Theorie auf einige neue Beyſpiele anwenden.

10. Der Coſinus eines ſtumpfen Winkels iſt eine inverſe Quantität, weil in dem Urſyſtem, von dem man ausging, und auf das er bezogen wird, alle Winkel $< \pi$ ſind, alſo $cof = 1 - \mathit{ſin\ verſ.}$, und $1 > \mathit{ſin\ verſ.}$ Wird aber der Winkel ſtumpf, ſo iſt im Gegentheil $\mathit{ſin\ verſ} > 1$, und der Coſinus der Unterſchied zweyer andern Quantitäten, von denen man die gröſsere als die kleinere anſah, folglich invers.

Soll daher die Urformel $cof = 1 - \mathit{ſin\ verſ.}$ für einen ſtumpfen Winkel gelten, ſo muſs das Zeichen des Coſinus darin geändert werden, und man erhält

$$-cof = 1 - \mathit{ſin\ verſ} \text{ oder}$$
$$cof = \mathit{ſin\ verſ} - 1.$$

Eben ſo hat man aus den Urformeln

$$\mathit{tang}\ a = \frac{\mathit{ſin}\ a}{cof\ a} = \frac{\mathit{ſin}\ a}{1 - \mathit{ſin\ verſ}\ a} = \frac{\mathit{ſin}\ a\,(1 - \mathit{ſin\ verſ}\ a)}{(1 - \mathit{ſin\ verſ}\ a)^2}$$
$$= \frac{\mathit{ſin}\ a - \mathit{ſin}\ a\ .\ \mathit{ſin\ verſ}\ a}{1 - 2\ \mathit{ſin\ verſ}\ a + \mathit{ſin\ verſ}^2 a},$$

d. h.
$$\mathit{tang}\ a = \frac{\mathit{ſin}\ a}{1 - 2\ \mathit{ſin\ verſ}\ a + \mathit{ſin\ verſ}^2 a} - \frac{\mathit{ſin}\ a\ .\ \mathit{ſin\ verſ}\ a}{1 - 2\ \mathit{ſin\ verſ}\ a + \mathit{ſin\ verſ}^2 a}.$$

Wird in dieſen Formeln $a$ ſtumpf, ſo hat man $\mathit{ſin\ verſ}\ a > 1$; alſo iſt dann $\mathit{tang}\ a$ der Unterſchied zweyer Quantitäten, von denen man die gröſsere als

die kleinere anſah, d. h. invers, und die wahre Formel für dieſen Fall iſt

$$tang\ a = \frac{ſin\ a\ (ſin\ verſ\ a - 1)}{(ſin\ verſ\ a - 1)^2}.$$

Dem ohnerachtet hat man doch immer $tang\ a = \frac{ſin\ a}{coſ\ a}$, weil in dieſer Gleichung $tang\ a$ und $coſ\ a$ zugleich invers werden. Man muſs alſo beyder Zeichen verändern, und erhält

$$-tang\ a = \frac{ſin\ a}{-coſ\ a} \text{ oder } tang\ a = \frac{ſin\ a}{coſ\ a},$$

wobey man bemerken wird, daſs in dem Augenblicke, wo $tang\ a$ das Zeichen ändert, ſie durch $\infty$ geht, weil gerade da $coſ\ a$ durch o geht.

Eben ſo hat man im Urſyſtem

$$ſec\ a = \frac{1}{coſ\ a} = \frac{1}{1 - ſin\ verſ\ a} = \frac{1}{(1 - ſin\ verſ\ a)^2} - \frac{ſin\ verſ\ a}{(1 - ſin\ verſ\ a)^2}.$$

Wird nun $a > \pi$, ſo wird auch $ſin\ verſ\ a > 1$, und die Secante wird wie die Tangente invers. Die wahre Formel iſt dann

$$ſec\ a = \frac{ſin\ verſ\ a}{(ſin\ verſ\ a - 1)^2} - \frac{1}{(ſin\ verſ\ a - 1)^2},$$

wo doch noch immer $ſec\ a = \frac{1}{coſ\ a}$, weil die Secante und der Coſinus zugleich invers werden.

Es iſt merkwürdig, daſs dieſs Beyſpiel, welches nach unſerer Theorie ſo leicht zu erklären iſt, ganz die Meynung mehrerer umſtöſst, denen negative Quantitäten nur gewöhnliche Quantitäten ſind, die man im entgegengeſetzten Sinne von den poſitiven genommen hat.

11. Man kann fragen, wozu es nütze, Quantitäten, die mit einem falſchen Zeichen behaftet ſind, in die Rechnung zu bringen, und ob es nicht ein-

facher ſey, einer jeden gleich das paſſende Zeichen zu geben?

Zuerſt erinnere ich dagegen, daſs man oft dazu gezwungen wird. Sucht man z. B. die Ordinate einer Curve, ohne die Gegend zu kennen, in der ſie ſich befindet, ſo muſs man dieſe doch erſt willkührlich annehmen. Fällt hierbey nun ein Irrthum vor, ſo findet man freylich den abſoluten Werth der geſuchten Ordinate, aber mit einem Zeichen, das dem, was ſie haben ſollte, entgegengeſetzt iſt. Man verbeſſert den begangenen Irrthum alſo leicht, indem man eine der erſten Annahme entgegengeſetzte Gegend annimmt.

12. Aber oft iſt auch der Irrthum nicht ſo leicht zu verbeſſern, und man ſieht ſich gezwungen, die Rechnung nach neuen Annahmen wieder anzufangen. Man glaube nie eine wahre Auflöſung erhalten zu haben, wenn man nicht für die Unbekannte einen poſitiven Werth gefunden hat, weil dieſe poſitiven Werthe die einzigen wahrhaft verſtändlichen ſind, und alle andern nothwendigerweiſe eine Unverträglichkeit der gegebenen Bedingungen und der Annahmen, auf denen die Rechnung beruht, anzeigen. Man muſs alſo dieſe Annahmen ändern, oder die Bedingungen der Aufgabe ſo lange modificiren, bis man einen poſitiven Werth für die Unbekannte hat. Hat die Gleichung poſitive und negative Wurzeln, ſo geben nur die erſteren wahre Auflöſungen. Auf jede der anderen muſs man die Betrachtungen anwenden, die wir vorher angeſtellt haben, da eine einzige Wurzel einen negativen Werth erhielt. Mitunter ſind ſogar dieſe Wurzeln ganz ohne Bedeutung, und nichts wie bloſse algebraiſche Formen, die durch gewiſſe Umformungen in die Rechnung gebracht ſind, denen ſich die Gleichung im Verfolge der Behandlung unterwerfen muſste.

13. Doch nicht Nothwendigkeit allein begründet den Gebrauch inverſer Quantitäten, auch der Vortheil beſtimmt dazu, den ſie gewähren, durch eine einzige Formel ein veränderliches Syſtem in jedem Zuſtande darſtellen zu können. So würde man z. B., wenn man ſie nicht anwenden wollte, vier verſchiedene Gleichungen brauchen, um die vier Gegenden einer ebenen Curve darzuſtellen, die durch ihre beyden Axen getheilt wird, acht Gleichungen für eine krumme Oberfläche u. ſ. w., indeſs, wenn man inverſe Quantitäten braucht, eine Gleichung die vorigen acht umfaſst, wenn man nur am Ende der Rechnung das Zeichen der inverſen Quantitäten im Reſultate ändert.

14. Alles bisher Geſagte betrifft nur die inverſen Quantitäten, denen man fälſchlich den Namen negative gegeben hat, ich ſage fälſchlich, weil dieſer Ausdruck natürlicherweiſe nur für die paſſend ſeyn kann, die wirklich mit dem Zeichen — behaftet ſind, da die inverſen Quantitäten bald +, bald — haben.

Die eigentlichen negativen Quantitäten, von denen ich noch zu reden habe, machen gar keine Schwierigkeiten, wenn gröſsere poſitive Quantitäten vorhergehen, aber wenn man durch Verſetzung oder algebraiſche Umformung auf eine iſolirte negative Quantität, oder auf eine, die eine kleinere poſitive vor ſich hat, ſtöſst, oder im Allgemeinen auf einen algebraiſchen Ausdruck, der unausführbare Verrichtungen anzeigt, ſo muſs man dieſen Ausdruck als eine bloſse Form betrachten, die an und für ſich gar keine wahre Bedeutung hat, aber doch *implicite* die geſuchten Verhältniſſe der darin vorkommenden Quantitäten umfaſst. Das Abſurde und Unverſtändliche darin iſt durch Umformungen hineinge-

kommen, und muſs durch andere Umformungen verſchwinden, und nur, wenn ſie auf eine klare Form gebracht iſt, d. h. wenn ſie nur mögliche Verrichtungen anzeigt, darf man ſie nützlich anwenden. Bis dahin ſieht man ſie an wie einſtweilig unter eine unbedeutliche Form gebracht, bloſs um die Rechnung zu erleichtern.

Nur durch die Syntheſis beweiſet man die Regeln der algebraiſchen Zeichen, da man ſie nur auf bedeutliche Ausdrücke gründen kann. Man beweiſet nicht, daſs

$$+a \times -b = -ab,$$

aber man beweiſet, daſs

$$+a \times (B-b) = aB - ab,$$

wo $B > b$ angenommen wird. Nachher, wenn man $B < b$ oder $B = 0$ annimmt, ſchlieſst man aus bloſser Analogie, daſs

$$+a \times -b = -ab,$$

und dehnt ſo dieſe algebraiſche Regel auf jede Funktion aus, ſey ſie bedeutlich, oder nicht.

In dieſer Hinſicht muſs man die bloſs negativen Quantitäten als eingebildete betrachten, d. h. als bloſse algebraiſche Formen, da ja die letzteren nur die Quadratwurzeln der erſteren ſind, und kein Grund vorhanden iſt, warum die einen möglich ſeyn ſollten, wenn die andern es nicht ſind. Jede wirkliche Quantität muſs ihre Quadratwurzel haben, und wenn ſie ſie nicht hat, ſo iſt das ein Beweis, daſs ſie unmöglich iſt, beyde unterſcheiden ſich nur eigentlich genommen durch verſchiedene Grade der Unmöglichkeit.

15. Eben deswegen iſt die Arbeit der Gelehrten uns ſo wichtig, die dargethan haben, daſs die Reſultate, zu denen man durch den Gebrauch dieſer unbedeutlichen Formen kommt, nie ſich von denen

entfernen, die man durch andere Rechnungen erhält, ohne ſich ſolcher Formen zu bedienen. Eine Arbeit, die die Vorzüge der analytiſchen Methoden durch Beweis derer Reſultate ins hellſte Licht ſtellt, da ſie an und für ſich ſchon an Leichtigkeit und Kürze die ſynthetiſchen übertreffen. Ich bitte hier zu vergleichen, was ich S. 53 u. f. über Analyſis und Syntheſis geſagt habe.

16. Aus dem bisher Geſagten ſchlieſse iſt:

1) Daſs es keine andere Quantitäten, als die abſoluten giebt, mit denen man die ſogenannten poſitiven Quantitäten gleich ſtellen kann.

2) Daſs die Analytiker den Ausdruck negative Quantität in zwey weſentlich verſchiedenen Bedeutungen brauchen, einmal für die mit — behafteten, und dann für ſolche Quantitäten, deren Zeichen demjenigen, das ſie eigentlich haben ſollten, entgegengeſetzt iſt.

3) Daſs man daher, um Zweydeutigkeiten zu vermeiden, für dieſe beyden Arten zwey Benennungen feſtſetzen muſs, wo ich nun die erſten eigentliche negative Quantitäten, und die andern inverſe Quantitäten nenne.

4) Daſs die eigentlichen negativen Quantitäten iſolirt gedacht, eben ſo unmöglich wie die eingebildeten ſind, und daſs man beyde nur als bloſse algebraiſche Formen anſehen darf, die man nach der Analogie in der Rechnung für wirkliche Quantitäten braucht.

5) Daſs die Rechnung nur dann Bedeutung erhält, wenn man durch mehrere Umformungen auf ein klares Reſultat gekommen iſt, d. h. ein Reſultat, worin alle Quantitäten abſolute ſind, und durch die Zeichen nur mögliche Verrichtungen angezeigt werden.

6) Dafs der Gebrauch der negativen und eingebildeten Quantitäten in der Rechnung den eigentlichen Charakter der Analyfis ausmacht, fie wefentlich von der Syntheſis unterfcheidet, und ihr ein fo grofses Uebergewicht über die letzten giebt.

7) Dafs die inverfen Quantitäten immer einen in der Rechnung begangenen Irrthum und eine Unverträglichkeit unter den Bedingungen der Aufgabe und den Annahmen bey Setzung der Gleichung anzeigen.

8) Dafs, um diefen Irrthum zu berichtigen, man die Bedingungen und Annahmen modificiren mufs, bis unter ihnen kein Widerfpruch mehr ift, folglich auch keine inverfe Quantität im Refultate.

9) Dafs man, um diefe Modifikationen anzubringen, das Ende der Rechnung abwarten darf, weil fie da oft einfach angedeutet find, dafs man die ganze Rechnung nicht von neuem wieder anzufangen braucht.

10) Dafs jede inverfe Quantität der Unterfchied zweyer direkten ift, von denen man die gröfsere bey Setzung der Gleichung für die kleinere anfah, und umgekehrt.

11) Dafs man blofs in diefer letzten Bedeutung, und nicht mit Bezug auf die eigentlichen negativen Quantitäten, den bekannten Grundfatz verftehen mufs, dafs jede Quantität, die vom Pofitiven zum Negativen, oder umgekehrt, übergeht, nothwendig durch o oder durch $\infty$ gehen mufs.

12) Dafs endlich durch diefe Theilung der fogenannten negativen Quantitäten in eigentliche

negative und inverſe nichts an den gewöhnlichen Verrichtungen der Rechnung geändert wird, ſondern daſs dadurch bloſs die Widerſprüche und die Zweydeutigkeiten verſchwinden, die nothwendigerweiſe entſtehen muſsten, da man zwey weſentlich verſchiedenen Dingen dieſelbe Benennung gab.

Ende des erſten Theils.

699967

# Verbeſſerungen.

Zuförderſt bitte ich dem Perpendikel, das ſich an mehreren Stellen ein *genus maſculinum* erſchlichen hat, ſein Geſchlecht zu nehmen, und es nach Verdienſt geſchlechtlos zu machen. Eben ſo für Funktion, direkt, Conſtruktion u. ſ. w. Function, direct, Conſtruction u. ſ. w. zu leſen.

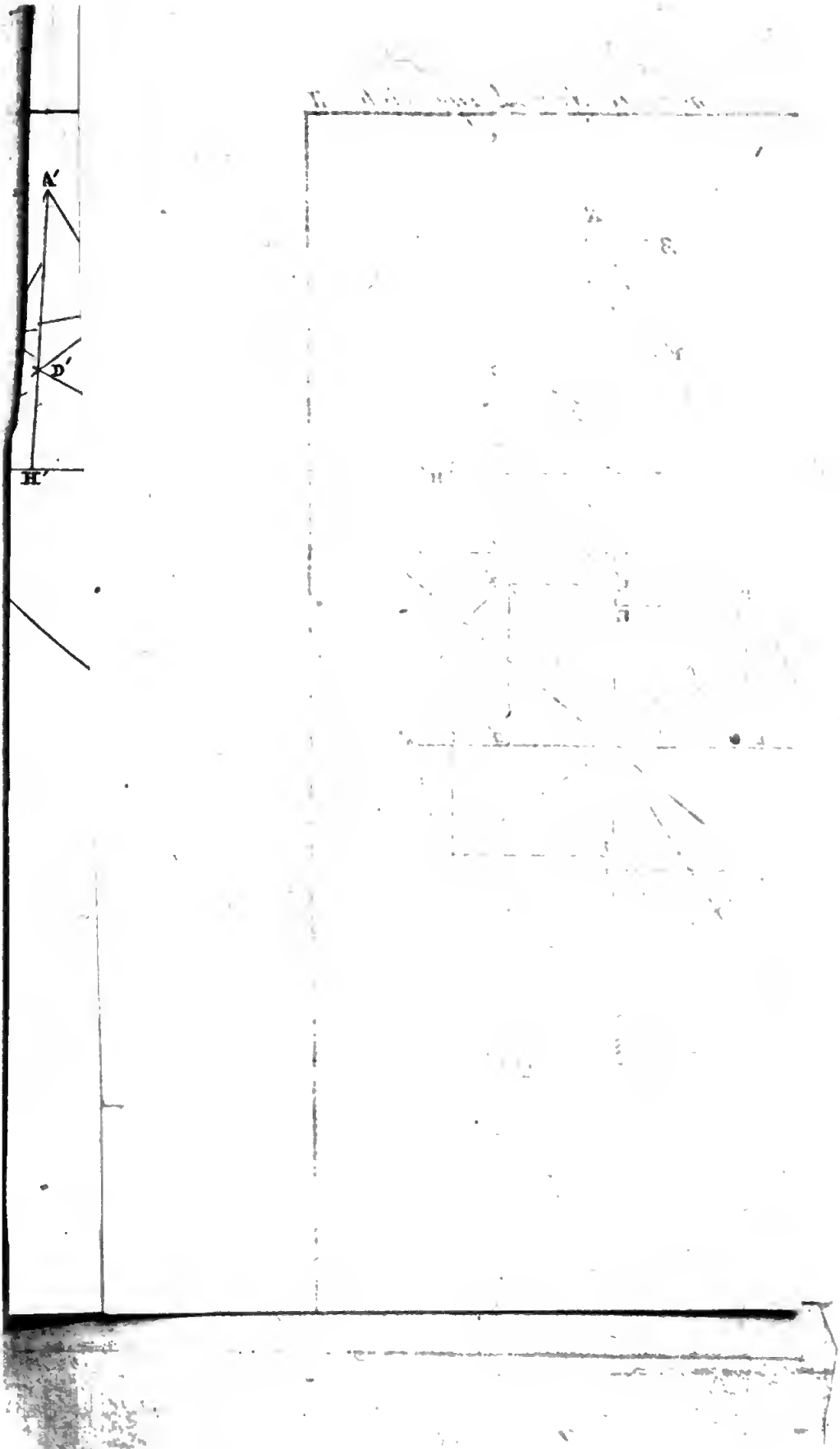
Für Lineo-angulär-Quantitäten, bitte ich goniometriſche Funktionen zu ſetzen.

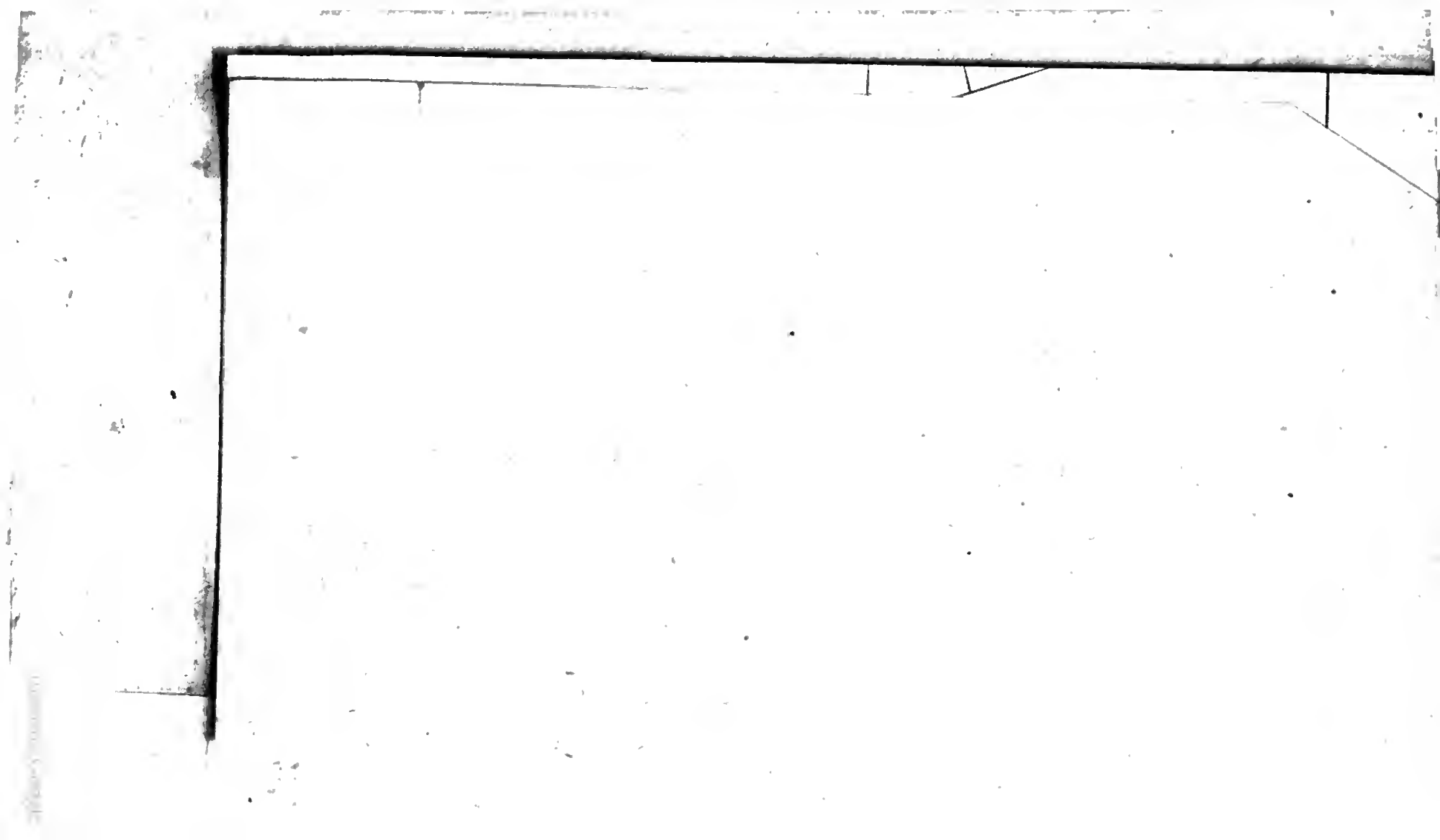
Sonſt habe ich nur folgende erhebliche Schreibfehler bemerkt.

S. 5. Z. 6. v. o. ſtatt leicht iſt, die lies leicht iſt die Vorſtellung.
— 5. — 8. v. o. ſt. ihn l. ſie.
— 28. — 6. v. u. ſt. Ausdruck der Vergleichung l. Maaſsſtab zur Vergl.; eben ſo noch an einigen Stellen nachher, wo wieder Ausdr. der Vergl. vorkommt.
— 32. — 6. v. u. ſt. Kugelſchnitte l. Kegelſchnitte.
— 32. — 3. v. u. ſt. über dieſs im Gegentheil die l. über die, die im Gegentheil ſich.
— 37. — 1. v. o. ſt. Erklärungen l. Entwickelungen.
— 45. — 13. v. u. ſt. Differentien l. Differentiale.
— 60. — 5. ſt. in einem Werke l. mit einem Worte.
— 62. — 14. v. u. ſt. mit der Moral, mit Muthmaſsungen unbeſtimmter Thatſachen lies: mit der moraliſchen Beſchaffenheit der Menſchen, mit Muthmaſsungen, unbeſtimmten Thatſ.
— 63. — 3. v. u. ſt. die auf ſie wirken l. mit denen ſie behaftet ſind.
— 64. — 1. ſt. als Gränze, oder als erſter und letzter Werth l. zur Gränze, oder zum erſten und letzten Werth.
— 64. — 4. ſt. der Gränze l. dieſe Gränze.
— 65. — 7. v. u. ſt. auf 2 Ausdrücke l. auf zwey Glieder.
— 66. { — 15. v. u. ſt. / — 13. v. u. ſt. } Ausdrücke l. Glieder.
— 68. — 9. v. u. ſt. Gröſse l. Quantität.
— 68. — 1. v. u. ſt. daſs er l. daſs es.
— 69. — 4. v. u. in verkehrter l. in inverſer.
— 70. — 6. v. u. ſt. correl. Syſteme, ſo l. correlative Syſteme ſo,
— 72. — 31. v. u. ſt. den letzten Ausdruck afficirt l. mit dem der letzte Ausdruck behaftet iſt.
— 73. — 9. v. o. ſt. Richtung l. Sinn.
— 74. — 14. v. u. ſt. von .... afficirt l. mit .... behaftet.
— 75. — 6. v. o. Mittel der V. l. Maaſsſtab zur V.
— 75. — 9. v. u. ſt. Conformität u. Nichtconformität l. Gleichförmigkeit und Ungleichförmigkeit.
— 77. — 10 v. o. ſt. Verrichtung l. Function.
— 81. — 6. v. u. ſt. ſie afficiren l. mit ihnen behaftet ſind.
— 84. — 4. v. o. ſt. bey l. unter.
— 87. — 6. v. o. ſt. laut l. im Laufe.
— 95. — 3. v. u. ſt. den l. das.
— 96. — 3. v. u. ſt. rationel l. rational.

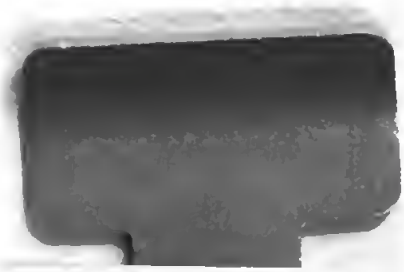
S. 100. Z. 10. v. o. ſt. wie im Fall darauf l. wie im vorhergehenden Fall, darauf.
— 100. — 1. v. u. ſt. nie l. nur.
— 105. — 2. v. u. ſt. Ausdrücke l. Glieder, eben ſo auf der folgenden Seite.
— 116. — 10. v. o. ſt. iſt l. ſey.
— 119. — 12. v. v. u. ſt. der l. die.
— 120. — 15. v. u. ſt. bereits von $A$ l. rechts von $B$.
— 121. — 14. v. o. ſt. andere. Weil l. andere, weil.
— 123. — 3. v. u. ſt. der als links l. der, links.
— 126. — 10. v. o. ſt. Boſſüt's l. Boſſut's.
— 128. überall für Frage lies Aufgabe.
— 129. Z. 13. v. u. applicirte l. klare.
— 132. — 12. v. u. ſt. wirklich, gewiſs l. gewiſſe.
— 147. — 7. v. u. ſt. verwirrtes l. verworrenes.
— 149. für Bedeutung l. Sinn.
— 151. Z. 9. v. u. ſt. nie l. nur.
— — — — — ſt. der Reſultate der S. l. ihrer Reſultate, mit denen der S.
— 153. — 7. v. u. ſt. ihm l. ihre.
— 176. — 1. v. u. ſt. auf die andern l. auf die andere.
— 245 — 10. v. u. ſt. mit ihr hat er l. darauf hat er.
— 248 — 7. v. o. ſt. war möglich l. wäre möglich.
— 300. — 1. v. u. ſt. $b\,\frac{\sin B + \sin C + \cos(B+C)}{2 \cdot \sin B}$ lies $b\,\frac{\sin B + \sin C + \sin(B+C)}{\sin B}$.

B


A'
D'
H'



57
B



Digitized by Google